第 3 章　资产定价模型的半参数方法

Bruce N. Lehmann

本文在广义矩法（GMM）框架下探讨资产定价模型的半参数估计方法。GMM 广泛地应用于资产定价模型的无条件形式，而资产定价理论隐含的条件均值约束却很少充分利用 GMM 估计。本文的目的是采取适当的步骤来弥补这一不足。有效矩估计的性质可用金融经济学家熟悉的术语加以阐述：最大相关或最优保值的资产组合。同样的，beta 定价模型族提供了识别资产定价应用中效率增益（efficient gain）来源的自然设定。希望本文适度的讨论有助于可获得的效率增益的更经常利用。

1．引言

无摩擦市场中的资产定价关系具有半参数的内在属性，即无须附加分布假设，估值模型通常就能满足条件矩约束。因而，一种自然的估计策略是用样本条件矩代替总体条件矩。不同的是，Hansen（1982）的广义矩（GMM）框架将资产定价关系的经济学和计量学紧密联系起来。

尽管资产定价的文献大量使用了 GMM 法，实证工作者却很少充分利用 GMM 工具。 特别是研究者通常用其无条件形式，该形式并未用尽资产定价模型隐含的矩条件内在的所有效率增益，出现这种情况的两种可能原因是：（1）所需的信息过大使得充分利用不可行；（2）有关有效半参数估计的文献资料有些难懂。

本文的目的是采用适当的步骤以弥补这一不足。有效矩估计的性质可用金融经济学家熟悉的术语加以阐述：最大相关或最优保值的资产组合。同样的，beta 定价模型族提供了识别资产定价应用中效率增益来源的自然设定。希望本文适度的讨论有助于可获得的效率增益的更经常利用。

本文的结构如下：第 2 节着眼于资产定价模型中的后续应用，概述 GMM 的基础知识；第 3 节给出了市场不存在套利机会下，资产定价的经济学与无套利隐含的条件矩约束下资产定价模型估计的计量经济学之间的联系；第 4 节详细探讨了这两节讨论的一般效率增益，将效率增益的来源归入到 beta 定价模型中；最后一节是结束语。

2．广义矩方法（GMM）的有关知识

在阐明 GMM 和资产定价理论的关系之前，鉴于后续的应用，有必要先介绍 GMM 的一些基础知识，但无法涵盖所有内容，例如，有关的大样本理论仅作了概要介绍（未严密地展开），而且所谓有关的知识也仅是 GMM 所要说明的估计和推断问题的一部分。有兴趣的读者可参考本系列第 11 卷的三个研究：Hall(1993),Newey(1993)和 Ogaki(1993)，以获得更全面的了解和指导。

GMM 始于如下形式的矩约束：

$$E[\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)\,|\,I_{t-1}] = E[\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)] = 0 \tag{2.1}$$

其中 $\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)$ 是模型中条件均值为 0 的 q×1 随机向量，$\underline{\theta}_0$ 是模型中相应的 p×1 参数向量， I_{t-1} 是至少包括 $\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)$ 的滞后值在内的未详加说明的信息集，随机变量 0 条件均值的约束意味着 $\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)$

遵从一个鞅差分（martingale difference）序列，因而是无序列相关的。[1]

大量著名的经济计量模型采用这一形式。例如，线性回归模型：

$$Y_t = \underline{x}'_t \underline{\beta}_0 + \varepsilon_t \tag{2.2}$$

其中，y_t 是因变量的第 t 个观测值，$\underline{x}_t$ 是 p×1 的解释变量向量，ε_t 是随机扰动项。在这一模型中，假定计量经济学家观测到一个使得 $E[\varepsilon_t \mid \underline{z}_{t-1}] = 0$ 的向量 $\underline{z}_t$，则该模型具有矩条件：

$$\underline{g}_t(\underline{\beta}_0) = \varepsilon_t \underline{z}_{t-1}; E[\varepsilon_t \underline{z}_{t-1} \mid \underline{z}_{t-1}] = E[\varepsilon_t \underline{z}_{t-1}] = E[\varepsilon_t]\underline{z}_{t-1} = \underline{0} \tag{2.3}$$

当 $\underline{z}_{t-1} = \underline{x}_t$ 时，这是可能带有随机回归元的线性回归模型；否则，它是一个工具变量估计量。

GMM 包括设置这些矩条件的相应样本形式，使之尽可能接近于零。当然，如果线性独立矩条件的数目超出了未知参数的数目，它们不能都设为零。取而代之的是，GMM 取这些矩条件的 p 个线性组合，并求 $\underline{\theta}$ 的值，使得这 p 个线性组合为零。

首先，考虑矩条件的无条件形式——即，$E[\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)] = 0$。为了使模型可识别，假设 $\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)$ 具有非奇异的总体协方差矩阵，并且 $E[\partial \underline{g}_t(\underline{\theta}_0)' / \partial \underline{\theta}] = 0$ 是满行秩的。GMM 估计量可以由两种方法导出，遵循 Hansen(1982)的方法，求 GMM 估计量 $\hat{\underline{\theta}}_T$，使得 $\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)$ 的 T 个样本观测值的样本二次型最小化。

$$\min_{\underline{\theta}} \underline{\overline{g}}_T(\underline{\theta})' W_T(\underline{\theta}_0) \underline{\overline{g}}_T(\underline{\theta}); \ \underline{\overline{g}}_T(\underline{\theta}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \underline{g}_t(\underline{\theta}) \tag{2.4}$$

假定正定权重矩阵 $W_T(\underline{\theta}_0)$ 依概率收敛于正定极限 $W(\underline{\theta}_0)$。在这一变形中，计量经济学家可以通过选择 $W_T(\theta_0)$ 为 GMM 估计量提供合乎需要的渐进特性。

另一种可供选择的方法是，简单定义估计量 $\overline{\underline{\theta}}_T$ 为下列方程组的解：

$$A_T(\underline{\theta}_0) \underline{\overline{g}}_T(\hat{\underline{\theta}}_T) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} A_T(\underline{\theta}_0) \underline{g}_t(\hat{\underline{\theta}}_T) = \underline{0} \tag{2.5}$$

其中，$A_T(\underline{\theta}_0)$ 是 p×q 的 $0_p(1)$ 矩阵序列，收敛于行秩为 p 的极限 $A(\underline{\theta})$。在这一公式中，选择 $A_T(\underline{\theta}_0)$ 是为最终估计量提供合乎需要的渐进特性。这两种变形的估计方程，在形式上当然是相同的，因为：

[1] 在 $g_t(\theta_0)$ 是序列相关情况下，只要将大数法则和中心极限定理应用于它的时间序列平均值，可以容易地确立 GMM 估计量的行为。

$$A_T(\underline{\theta}_0)\overline{\underline{g}}_T(\hat{\underline{\theta}}_T) = G_T\hat{\underline{\theta}}_T W_T(\underline{\theta}_0)\overline{\underline{g}}_T(\hat{\underline{\theta}}_T) = 0;$$
$$G_T(\underline{\theta}) = \frac{\partial \overline{\underline{g}}_T(\underline{\theta})'}{\partial \underline{\theta}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial \underline{g}_t(\underline{\theta}_0)'}{\partial \underline{\theta}} \tag{2.6}$$

就本文的目的而言，方程(2.5)是更可取的形式。

$\hat{\underline{\theta}}_T$ 的大样本行为很明显，特别是本例中 $\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)$ 为鞅差分序列。[2] 适当的弱大数法则可确保 $\overline{\underline{g}}_T(\underline{\theta}_0)\xrightarrow{p}\underline{0}$，加上识别条件，意味着 $\hat{\underline{\theta}}_T\xrightarrow{p}\underline{\theta}_0$，只要所需的时间序列平均值收敛：

$$S_T(\underline{\theta}_0) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} E[\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)'] \xrightarrow{p} S(\underline{\theta}_0);$$
$$\left|S(\underline{\theta}_0)\right| > 0 \quad G_T(\underline{\theta}_0)\xrightarrow{p} G(\underline{\theta}_0) \tag{2.7}$$

根据标准一阶泰勒展开式并结合 Slutsky 定理，得出：

$$\sqrt{T}(\hat{\underline{\theta}}_T - \underline{\theta}_0)\xrightarrow{p} -D(\underline{\theta}_0)\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}\underline{g}_t(\underline{\theta}_0);$$
$$D(\underline{\theta}_0) = [G(\underline{\theta}_0)W(\underline{\theta}_0)G(\underline{\theta})']^{-1}G(\underline{\theta}_0)W(\underline{\theta}_0) \tag{2.8}$$

合适的鞅的中心极限定理保证：

$$\sqrt{T}(\hat{\underline{\theta}}_T - \underline{\theta}_0)\xrightarrow{D} N[\underline{0}, D(\underline{\theta}_0)S(\underline{\theta}_0)D(\underline{\theta}_0)'] \tag{2.9}$$

用 $\hat{\underline{\theta}}_T$ 代替表达式中的 $\underline{\theta}_0$，可以得出对条件异方差具有稳健性（robust）的一致标准误估计量。[3]

选择什么样的 $A_T(\underline{\theta}_0)$，或者等价地，选择什么样的 $W_T(\underline{\theta}_0)$ 是最优的？所有固定权重估计量——即，对固定的 T，每个 $\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)$ 赋予同样权重的矩阵 $A_T(\underline{\theta}_0)$——在上述的弱正则性（weak regularity）条件下是一致的。因此，很自然地要比较估计量的渐进方差，这是一种只要把注意力集中到正则类估计量，便可以更正式地证明其合理性的准则，这种正则类估计量不包括超有效（superefficient）估计量。渐进最优的 $A_T^0(\underline{\theta}_0)$ 是通过令 $W_T(\underline{\theta}_0)$ 等于 $S_T(\underline{\theta}_0)^{-1}$ 而得到的，它同时产生渐进协方差阵 $[G(\underline{\theta}_0)S(\underline{\theta}_0)^{-1}G(\underline{\theta}_0)']^{-1}$，再一次地，可以将 $\hat{\underline{\theta}}_T$ 代替 $\underline{\theta}$ 对 $S_T(\underline{\theta}_0)$ 进行一致估计。[4]

最优无条件 GMM 估计量与极大似然估计量（MLE）有明显的关系，尽管我们不知道生成数据的

---

[2] 这一框架中估计和推导的权威论述参见 Hansen(1982)。

[3] 自相关在 $\underline{g}_t(\underline{\theta})$ 的条件期望为 0 且每期只抽取一次(即数据没有重迭(over lapping))的假设之下不会出现，如果数据有重迭，矩条件将有一个移动平均误差结构。有关本例的协方差矩阵估计的讨论参见 Hansen 和 Hodrick(1980)。对更一般的自相关方法的讨论，参见 Hansen、Singleton(1982)以及 Newey 和 West（1987）。

[4] $S_T(\underline{\theta}_0)$ 可能的奇异性在 4.3 节中作为证明因子结构假设正当性的一部分间接地讨论了。由于本文的中心不在于假设检验，矩条件拟合值的二次型及最优加权矩阵得出检验统计量
$T\,\overline{\underline{g}}_T(\hat{\underline{\theta}}_T)'S_T(\hat{\underline{\theta}}_T)^{-1}\overline{\underline{g}}_T(\hat{\underline{\theta}}_T)\xrightarrow{D} x^2(q-p)$，其中估计 $\underline{\theta}$ 所用的自由度为 p。这一过度识别条件的检验就是著名的 Hansen 的 J 检验

概率法则。令 $\varphi_t(\underline{\theta}_0,\underline{\eta})$ 代表 $\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)$ 数据的总体条件分布的对数，其中 $\underline{\eta}$ 是多余参数（nuisance parameters）的可能无限维集合，类似地，令 $\varphi_t'(\underline{\theta}_0,\underline{\eta})$ 代表真实的得分函数（Score function），$\varphi_t(\underline{\theta}_0,\underline{\eta})$ 是关于 $\underline{\theta}$ 的导数向量。考虑 $\varphi_t'(\underline{\theta}_0,\underline{\eta})$ 在矩条件 $\underline{g}_t(\theta_0)$ 上的无条件总体投影（population projection）：

$$\begin{aligned}&\varphi_t'(\underline{\theta}_0,\underline{\eta}) = Cov[\varphi_t'(\underline{\theta}_0,\underline{\eta}),\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)']Var[\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)]^{-1}\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)+\underline{\nu}_{\varphi ut}\\&=-\Phi\Psi^{-1}\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)+\underline{\nu}_{\varphi ut}\\&\Phi = E[\frac{\partial \underline{g}_t(\underline{\theta}_0)'}{\partial \underline{\theta}}]\\&\Psi = E[\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)']\end{aligned} \qquad (2.10)$$

给定充分的正则性使得矩条件 $E[\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)]=\underline{0}$ 在积分号下可微，由于 $E[\varphi_t',\underline{g}(\underline{\theta}_0)']=-\Phi$ 为 0，沿用这一符号，无条件 GMM 估计量的渐进方差是 $[\Phi\psi^{-1}\Phi']^{-1}$。

因此，矩条件 $A_T^0(\underline{\theta}_0)$ 的最优固定线性组合与有限样本中真实但未知的条件得分有最大的无条件相关。可这一事实未能得出有限样本的有效评价，至少有两个原因：首先，有限样本中，对得分取线性形式 $I(\underline{\theta}_0)(\hat{\underline{\theta}}-\underline{\theta}_0)$ 以外的情形，MLE 本身不具有明显的有效性，其中 $I(\underline{\theta}_0)$ 是 Fisher 信息矩阵；其次，在 $A_T^0(\underline{\theta}_0)$ 中用可行的最优估计量 $\hat{\underline{\theta}}_T$ 代替 $\underline{\theta}_0$，得到一个一致估计量，但不具有明显的有限样本有效性。然而，在大样本中，最优固定加权 GMM 估计量保留这一性质。

现在考虑矩条件的条件形式，即 $E[\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)\,|\,I_{t-1}]=0$。计量经济学家可得到的先验信息是 $\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)$ 为一个鞅差分序列，因而，计量经济学家仅仅知道以 t-1 时的可得信息为权重的 $\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)$ 的线性组合的均值为 0——仅给定鞅差分假设时，$\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)$ 的非线性函数有未知的矩。因为计量经济学家可自由地使用随时间变化的权重，考虑如下形式的估计量[5]：

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}A_{t-1}\underline{g}_t(\hat{\underline{\theta}}_T)=\underline{0};\ A_{t-1}\in I_{t-1} \qquad (2.11)$$

其中，A_{t-1} 是计量经济家选择的 p×q 的 0_p（1）矩阵序列。为识别该模型，假设 $\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)$ 有非奇异总体条件协方差矩阵 $E[\underline{g}_t(\theta_0)g_t(\theta_0)'|I_{t-1}]$，并且 $E[\partial\underline{g}_t(\theta_0)'/\partial\underline{\theta}\,|\,I_{t-1}]$ 满行秩。

如果忽略与条件期望 $E[\bullet\,|\,I_{t-1}]$ 的计算有关的困难，渐进最优估计和推断的基本原理在条件和

[5] 估计量原则上可以包括这些时间序列平均值的非线性函数，但它们的渐进线性性意味着其影响被 A_{t-1} 吸收了。

无条件情况下非常相似。[6] 再次，上述正则性条件合适的形式：

$$[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} A_{t-1}\frac{\partial \underline{g}_t(\underline{\theta}_0)}{\partial \underline{\theta}'}]^{-1} \xrightarrow{p} [\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} A_{t-1}\Phi_{t-1}]^{-1} \xrightarrow{p} D_c(\underline{\theta}_0)$$

$$\Phi_{t-1} = E[\frac{\partial \underline{g}_t(\underline{\theta}_0)'}{\partial \underline{\theta}'}\Big|I_t]$$

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} A_{t-1}\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)'A'_{t-1} \xrightarrow{p} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} A_{t-1}E[\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)'\big|I_{t-1}]A'_{t-1}$$

$$\xrightarrow{p} S_c(\underline{\theta}_0)$$

(2. 12) *

(2. 11)的样本矩条件是渐进线性的，所以：

$$\sqrt{T}(\hat{\underline{\theta}}_T - \underline{\theta}_0) \xrightarrow{P} -D_C(\underline{\theta}_0)\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} A_{t-1}\underline{g}_t(\underline{\theta}_0) \qquad (2. 12)$$

且

$$\sqrt{T}(\hat{\underline{\theta}}_T - \underline{\theta}_0) \xrightarrow{D} N[\underline{0}, D_C(\underline{\theta}_0)S_C(\underline{\theta}_0)D_C(\underline{\theta}_0)'] \qquad (2. 13)$$

计量经济学家可以选择权重矩阵 A_{t-1} 以最小化该估计量的渐进方差，在这种意义上最优权重矩阵

A^0_{t-1} 由下式给出：

$$A^0_{t-1} = \Phi_{t-1}\Psi^{-1}_{t-1};\ \Psi_{t-1} = E[\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)'\big|I_{t-1}]$$

(2. 14)

而最终的最小渐进方差为：

$$Var[\sqrt{T}(\hat{\underline{\theta}}_T - \hat{\underline{\theta}})] \xrightarrow{p} [\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}\Phi_{t-1}\Psi^{-1}_{t-1}\Phi'_{t-1}]^{-1} \xrightarrow{p} [E(\Phi_{t-1}\Psi^{-1}_{t-1}\Phi'_{t-1})]^{-1} \qquad (2. 15)$$

A^0_{t-1} 不必直接赋值，在资产定价应用中进行这一赋值是第 4 节的首要任务。[7]

最优条件 GMM 估计量和 MLE 的联系与无条件情况相类似，$\varphi'_t(\underline{\theta}_0,\underline{\eta})$ 在矩条件 $\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)$ 上的条件总体投影：

$$\begin{aligned}\varphi'_t(\underline{\theta}_0,\underline{\eta}) &= Cov[\varphi'_t(\underline{\theta}_0,\underline{\eta}), \underline{g}_t(\underline{\theta}_0)']Var[\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)\big|I_{t-1}]^{-1}\underline{g}_t(\underline{\theta}_0) + \underline{\nu}_{\varphi ut} \\ &= -\Phi_{t-1}\Psi^{-1}_{t-1}\underline{g}_t(\underline{\theta}_0) + \underline{\nu}_{\varphi ut}\end{aligned} \qquad (2. 16)$$

[6] Hansen(1985),Tauchen(1986),Chamberlain(1987),Hansen,Heaton,和 Ogaki(1988),Newey(1990),Robinson(1991), Chamberlain(1992),以及 Newey(1993)在相关环境中讨论了有效 GMM 估计量。

* 原书（2.12）的标号重复使用，这里保持原样——译者注。

[7] 根据计算相关的条件期望的能力，有效估计量的计算是简单明了的。在弱正则性条件下，可以分两步得到估计量。首先获得一个初始的一致估计量（假定使用无条件 GMM 估计量(2.5)），用这一预先估计值，估计最优权重矩阵，然后求解(2.14)得到有效的条件 GMM 估计量。当然，尽管迭代和两步估计量是一阶渐进等价，方程(2.11)和(2.14)可以迭代直到收敛。

由于给定充分的正则性条件使得矩条件 $E[\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)\,|\,I_{t-1}]=\underline{0}$ 的微分和积分次序可交换时，

$E[\varphi_t'(\underline{\theta}_0,\underline{\eta})\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)'+\partial\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)'/\partial\underline{\theta}|I_{t-1}]$ 为 0，因而，矩条件 A_{t-1}^0 的最优线性组合，与有限样本中真实但未知的条件得分有最大的条件相关。虽然这一观测并未转化为明显的有限样本有效性，但建立在 A_{t-1}^0 基础上的 GMM 估计量与 MLE 有最高度的渐近相关。

表述最优的条件和无条件 GMM 估计量的相对效率是很方便的，和通常情形一样，由于条件 GMM 估计量相对于无条件 GMM 估计量是有效的，最优无条件和条件 GMM 估计量之差的方差，等于二者方差之差。给定鞅增量 $\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)$ 最优权重的差额为：

$$\begin{aligned}&A_{t-1}^0-A_T^0(\underline{\theta})=[\Phi_{t-1}-G_T(\underline{\theta})]\Psi_{t-1}^{-1}+G_T(\underline{\theta})[\Psi_{t-1}^{-1}-S_T(\underline{\theta})']\\&\xrightarrow{p}[\Phi_{t-1}-\Phi]\Psi_{t-1}^{-1}+\Phi[\Psi_{t-1}^{-1}-\Psi^{-1}]\end{aligned}\qquad(2.17)$$

注意，将期望迭代法则分别应用于 Φ_{t-1} 和 Ψ_{t-1}，但不应用于 A_{t-1}^0 的构成成分，以致 $E[A_{t-1}^0-A_T^0(\underline{\theta}_0)]$ 一般不收敛于 0。在任何情况下，只要 Φ_{t-1} 和 Ψ_{t-1} 中有相当的时间变差，条件估计量的相对效率总是高一些。

最后，GMM 方法的通常应用于条件和无条件的情形之间。它包含与信息集的元素不相关的零条件均值随机变量的观测值，令 $Z_{t-1}\in I_{t-1}$ 代表前定（predetermined）变量的 r×q(r≥p)矩阵，并考虑修正的矩条件：

$$E[Z_{t-1}\underline{g}_t(\theta_0)\,|\,I_{t-1}]=E[Z_{t-1}\underline{g}_t(\theta_0)]=\underline{0}\quad\forall Z_{t-1}\in I_{t-1}\qquad(2.18)$$

在上述讨论的无条件 GMM 方法中， Z_{t-1} 等于 I_q，是 q×q 单位矩阵。在许多应用中，相同的前定变量 z_{t-1} 乘以 $\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)$ 中的每个元素，以致 Z_{t-1} 有 $I_q\otimes z_{t-1}$ 的形式。最后，计量经济学家可得的不同信息子集 $z_{it-1}\in I_{t-1}$ 能够应用于 $\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)$ 中的每个元素，因而， Z_{t-1} 由下式给出：

$$Z_{t-1}=\begin{pmatrix}\underline{z}_{1t-1}&\underline{0}&\cdots&\underline{0}\\\underline{0}&\underline{z}_{2t-1}&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\underline{0}&\underline{0}&\cdots&\underline{z}_{qt-1}\end{pmatrix}\qquad(2.19)$$

虽然最优条件 GMM 能够应用于该情形，这一方法的关键是修正无条件 GMM。如前，

$\varphi_t'(\underline{\theta}_0)$ 在矩条件 $Z_{t-1}\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)$ 的无条件总体投影为：

$$\begin{aligned}
&\varphi_t'(\underline{\theta}_0,\underline{\eta}) = Cov[\varphi_t'(\underline{\theta}_0,\underline{\eta}),\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)'Z_{t-1}']Var[Z_{t-1}\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)]^{-1}Z_{t-1}\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)+\underline{\nu}_{\varphi ut} \\
&= -\Phi_z\Psi_z^{-1}Z_{t-1}\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)+\underline{\nu}_{\varphi ut} \\
&\Phi_z = E[\frac{\partial \underline{g}_t(\underline{\theta}_0)'}{\partial \underline{\theta}}Z_{t-1}'] \\
&\Psi_z = E\{Z_{t-1}\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)'Z_{t-1}']
\end{aligned} \tag{2.20}$$

因为，给定在积分号下可微的充分正则性条件，$E\{\varphi_t'(\underline{\theta}_0,\underline{\eta})\underline{g}_t(\underline{\theta}_0)'Z_{t-1}'\} = -\Phi_Z$，权重 $\Phi_z\Psi_z^{-1}Z_{t-1}$ 也可看作最优条件权重 $A_{t-1}^0 = \Phi_{t-1}\Psi_{t-1}^{-1}$ 的线性近似。换句话说，如果从计量经济家角度看，Z_{t-1} 是相关条件信息，则 A_{t-1}^0 一般是 Z_{t-1} 的非线性函数。

3．资产定价关系及其计量经济含义

现代资产定价源于市场无套利机会情况下产生的对证券价格的约束，市场无套利机会隐含严格的约束听起来有些奇怪。在国际经济学之外，当不存在对鸡蛋价格产生有意义的交易成本的经济约束时，两个蛋应该卖同样价格并不常见——毕竟，相同等级和新鲜度的两个蛋显然是可完全替代的。[8]对比之下，由于金融市场的近似替代特性，无套利假设对资产价格产生了经济上有意义的约束，不同资产或者更一般的资产组合，就它们的随机收益而言可以完全替代。但如果仔细考虑，这可能不那么显而易见，因为资产可能代表对表面看来非常不同的现金流的要求。

无套利资产定价的内涵已在一些论文中阐述，包括 Rubinstein（1976），Ross（1978b），Harrison 和 Kreps(1979),Chamberlain 和 Rothschild（1983）以及 Hansen 和 Richard（1987）。考虑证券市场上两天的交易：t-1 时（即今天）和 t 时（即明天），有 N 种风险资产，用 i=1,...,N,表示。这些资产太多，所以不必详尽投资者可获得的资产清单。资产 i 今天的名义价格是 P_{it-1}，明天的价值——即明天的价格加上今天和明天之间的任何现金流分布——从今天看,是不确定的,并取随机值 $P_{it}+D_{it}$，因而，它的总收益（即，1 加上收益百分比）为 $R_{it}=(P_{it}+D_{it})/P_{it-1}$。最后，如果存在某种一期无风险资产，具有确定的总收益 $R_{ft}=1/P_{ft-1}$，而 ι 总是代表一个 1 组成的合适的向量。

市场有两个决定性要素：一个是环境的，一个是行为的。首先，市场是无摩擦的，在没有税收、交易成本或其他如短期销售限制等条件下进行交易。[9]其次，投资者充分利用无摩擦假设下所提供的任何套利机会和行为，即投资者乐于进行没有收益的交易，而无需支付交易成本。

为了说明无套利资产定价的内涵，假设明天发生有限数目的可能自然状况，s=1,...,S。且在这些可能状态下证券的价值是 $P_{ist}+D_{ist}$，[10]显然，至多有 min[N,S]种具有线性独立收益证券组合，

[8] 这一说法被 Summers(1985,1986)改编成一幅生动的漫画。

[9] 一些摩擦可以很容易地包含在无套利框架中，但一般的摩擦代表了相当程度的复杂性，近期包括比例交易成本和短期销售约束的研究，请参见 Hansen, Heaton 和 Luttmer (1993),He、Modest(1993)和 Luttmer(1993)。

[10] 由于抽象的自然状态可以象不同日期和不同自然状态那样便于描述，两期限制几乎不会损失一般性。另外，尽管连续交易会出现一些技术性的问题，有限 S 得出的大多数结果可以也扩展到无限维的情形，具体讨论请参见

因而，如果$N \geq S$，并且至少 S 种具有线性独立收益资产，纯或有资产的价格被唯一确定——这种资产当状态 s 发生时，支付 1 单位收益，否则为 0。如果$N \leq S$，尽管当资产收益是线性独立时，它们受限于 N 维子空间内，但这些或有资产价格不是单由套利条件确定的。

令ψ_{st-1}表示纯或有资产的价格，如果明天状态为 s 时支付 1 单位的收益，否则为 0。按照投资者的信念，只要每个状态发生的概率为正，这些状态的价格就都是正的，任何资产的价格是逐个状态下收益值的总和，[11]特别地：

$$P_{it-1} = \sum_{s=1}^{S} \psi_{st-1}(P_{ist} + D_{ist}); \quad P_{ft-1} = \sum_{s=1}^{S} \psi_{st-1} \tag{3.1}$$

或，等价地:

$$\sum_{s=1}^{S} \psi_{st-1} R_{ist} = 1; \quad R_{fst-1} \sum_{s=1}^{S} \psi_{st-1} = 1 \tag{3.2}$$

因为它们是非负的，状态价格应尺度化，使其总和为 1，以体现概率的属性。因而，这些风险中性概率：

$$\pi^*_{st-1} = \frac{\psi_{st-1}}{\sum_{s=1}^{S} \psi_{st-1}} = R_{ft}, \Psi_{st-1} = \frac{\psi_{st-1}}{P_{ft-1}} \tag{3.3}$$

组成风险中性鞅的测度。之所以这样称它，是因为在这样的概率信念下任何资产价格为：

$$P_{it-1} = P_{ft-1} \sum_{s=1}^{S} \pi^*_{st-1}(P_{ist} + D_{ist}) \tag{3.4}$$

即它是期望现值。风险中性概率是无套利下的一个概括，当且仅当无套利时，它才存在。

这一状态定价问题的公式化表达极大地方便了对衍生资产的定价。在风险中性的鞅测度下，无风险利率是任何不改变市场的跨期，以及现金流与不同状态间有一个确定的映射时资产或证券组合的期望收益，然而，它不是一个方便于进行实证研究的方法。实际收益数据来源于真实（客观）的概率测度，即实际收益是在理性预期下产生的。

相应地，令π_{st-1}代表在 t-1 时期可获得的任意信息集I_{t-1}下，状态 s 在 t 时期发生的客观概率。按每单位概率的状态价格$q_{st-1} = \psi_{st-1} / \pi_{st-1}$重写定价关系式(3.1)和(3.2)可得：

$$\begin{aligned} P_{it-1} &= E[\sum_{s=1}^{S} q_{st-1}(P_{ist} + D_{ist}) \mid I_{t-1}] \equiv E[Q_t(P_{it} + D_{it}) \mid I_{t-1}] \\ P_{ft-1} &= E[\sum_{s=1}^{S} q_{st-1} \mid I_{t-1}] \equiv E[Q_t \mid I_{t-1}] \end{aligned} \tag{3.5}$$

或者，其相应的期望收益为：

Harrison 和 Kreps （1979）。

[11] 这一陈述中隐含无摩擦市场假设，在有摩擦市场，或有资产组合的收益不仅是各状态下构成证券的收益的加权平均值，还取决于在这一资产组合中发生的交易成本或税收。

$$E[\sum_{s=1}^{S} q_{st-1} R_{ist} \mid I_{t-1}] \equiv E[Q_t R_{it} \mid I_{t-1}] = 1$$
$$E[\sum_{s=1}^{S} q_{st-1} R_{ft-1} \mid I_{t-1}] \equiv R_{ft} E[Q_t \mid I_{t-1}] = 1 \qquad (3.6)$$

在一般性水平下，这些条件矩约束仅是市场无摩擦和市场价格无套利机会假设的含义。

资产定价理论赋予了这些先决矩条件，但通过潜在观察变量表达核定价 Q 的模型，这些条件可以放松。[12]该模型将每单位概率的状态价格 q_{st-1}、在状态 s 下接受 1 单位概率的成本，等于在状态 s 下接受 1 单位边际收益的某些相应测度。[13]许多均衡模型将经过通货膨胀调整后的 Q_t 等同于一个假定的、有代表性的追求最优的投资者的跨期边际替代率。[14]对于所有代理商来说，最一般的表达是加法可分的、不变的相对风险厌恶偏好，对其而言 $Q_t = \rho(c_t / c_{t-1})^{-\alpha}$，其中 ρ 是时间偏好率，c_t / c_{t-1} 是消费增长率，而α是相对的风险厌恶系数，它们都是代理变量。[15]

相应的，令 x_t 代表在某些资产定价模型中体现这些边际收益的相关观测变量，因而，核定价模型具有如下的一般形式：

$$Q_t = Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q); Q_t > 0; \underline{x}_t \in I_t \qquad (3.7)$$

其中，$\underline{\theta}_Q$ 是未知参数向量。确切地说，在仅给定 R_t 和 x_t 的观测值的条件下，可以用非参数形式估计函数 $Q(\bullet)$，参数成分可以进一步弱化，然而，许多文献都采用(3.7)形式的模型。[16]

方程(3.5)至(3.7)使资产定价理论具有内在的半参数性质，[17]这些资产定价关系的参数成分

12 也可用特定资产组合收益以非参数的形式识别核定价，例如，最优组合收益增长的解 Max $E\{\ln w'_{gt-1} \underline{R}_t \mid I_{t-1}; w_{gt-1} \in I_{t-1}\}$ 等于 Q_t^{-1}。当然，无参数分布的假定难以解这一求最大值的问题，可参见 Bansal 和 Lehmann（1955）在利息期限结构中的应用。附加的观测变量可以用于识别与收益有关的状态，它使得非参数的估计在某种程度上有些半参数的性质。不同的是，计量经济学家通常是在不知哪一状态已发生的情况下观察一个收益的序列，向量 $\underline{x}_t$ 提供了在时间 t 自然实现收益的有关状态的指示器，它有助于识别同样的结果（即状态，其每单位概率具有同样的状态价格）。Bansal 和 Viswanathan（1993）按照这样的方法建立了模型。

13 这一方程的边际收益部分使 Q_t 的特定日期约定合理化，即当它等于 t-1 时间每单位概率的状态价格时。

14 Q_t 中嵌入的膨胀率消除了区分名义和实际核价格定义的需要，即 Q_t 等于 $Q_t^{real} p_{ct} / p_{ct-1}$，其中 p_{ct} 是将实际现金流和实际核定价 Q_t^{real} 转换为名义现金流及名义核定价的一个合适的指数。

15 更一般的模型允许多种商品以及各时和各状态消费偏好不可分，正如出现于消费商品的耐久性、习惯形成及非预期效用最大化所标志的偏好。Constantinides 和 Ferson(1991)在理论上和实证上总结了许多关于耐久性和习惯形成的文献资料，参见 Epstein 和 Zin(1991a)及 Epstein 和 Zin(1991b)有关 Q_t 未添加状态可分性的类似模型。Cochrane(1991)研究了生产者的相应边际条件。

16 例外包括 Bansal 和 Viswanathan(1993)以及具有未观测的 $\underline{\omega}_{t-1}$ 的线性模型 $Q_t = \underline{\omega}'_{t-1} \underline{x}_t$，该模型将在下一节讨论。

17 确切地说，计量经济学家可以设定一个资产收益的完全参数概率模型，而且这种模型在资产定价理论中是很突出的，例子包括基于正态分布收益的资本资产定价模型（CAPM），以及假定价格遵从 Ito 过程的连续时间资产定价模型族。

是核定价 $Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q)$ 的模型。条件的矩条件（conditional moment conditions）（3.6）可在没有附加分布的假定下用于识别 Q_t 模型中的任意未知参数并检验它的过度识别约束。同时注意到资产定价理论的结构给与一个明显的计量经济的简化，构造的变量 $Q_t R_{it} - 1$ 构成了一个鞅差分序列，因而是无序列相关的。这一事实大大简化了类似（3.6）的样本二阶矩计算，从而也简化了估计和推断。[18]

此外，这些关系的经济学意义限制了条件矩约束怎样用于估计和推断。Ross(1978b)观测到资产组合是在无摩擦市场上仅给定无套利机会的情况下，可以作为观测变量、时间和基本资产值的函数而单独定价的仅有衍生资产。对计量经济学家来说同样如此——对于给定的资产清单，计量经济学家仅知道具有权重 $\underline{w}_{t-1} \in I_{t-1}$ 的资产组合的价格和收益。

因而，仅有基于 t-1 时可得信息形成的条件矩条件的线性组合可用于估计模型。相应地缺少分布约束，计量经济学家*必须*在下述形式估计量的基础上进行估计和推断。

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} A_{t-1}[\underline{R}_t Q(\underline{X}_t, \hat{\underline{\theta}}_Q) - \underline{\iota}] = 0;\ A_{t-1} \in I_{t-1} \tag{3.8}$$

其中，A_{t-1} 是计量经济学家选定的 p×N 的 $0_p(1)$ 矩阵序列，p 是 $\underline{\theta}_Q$ 中元素的数目， 矩阵 A_{t-1} 可以看成是 p 个单位成本为 $A_{t-1}\underline{\iota}$、随机收益为 $A_{t-1}\underline{R}_t$ 的资产组合的权重。

金融计量学家如何选择 A_{t-1}^0 呢？一个因似然方法具有合乎要求的渐进性质而偏好它的计量经济学家，可能偏爱与真实、但未知的条件得分具有最大条件相关的 p 个资产组合。在这一应用中，$\varphi_t'(\underline{\theta}_0, \underline{\eta})$ 在 $[\underline{R}_t Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q) - \underline{\iota}]$ 上的条件投影由下式给出：

$$\begin{aligned}
\varphi_t'(\underline{\theta}_0, \underline{\eta}) &= Cov[\varphi_t'(\underline{\theta}_0, \eta), \underline{R}_t Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q)' \,|\, I_{t-1}] Var[\underline{R}_t Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q) \,|\, I_{t-1}]^{-1} \\
&\quad \times [\underline{R}_t Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q) - \underline{\iota}] + \underline{\nu}_{\varphi c Q t}, \\
&= -\Phi_{t-1}\Psi_{t-1}^{-1}[\underline{R}_t Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q) - \underline{\iota}] + \underline{\nu}_{\varphi c Q t}; \\
\Phi_{t-1} &= \frac{\partial E[Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q)\underline{R}_t \,|\, I_{t-1}]'}{\partial \underline{\theta}} \\
\Psi_{t-1} &= E\{[\underline{R}_t Q(\underline{x}_T, \underline{\theta}_Q) - \underline{\iota}][\underline{R}_t Q(\underline{X}_T, \underline{\theta}_Q) - \underline{\iota}]' \,|\, I_{t-1}\}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

因为 $E\{\varphi_t'(\underline{\theta}_0, \underline{\eta})[\underline{R}_t Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q) - \underline{\iota}]' \mid I_{t-1}\} = -\Phi_{t-1}$ 已给定充分的正则性条件使得在积分号下可微，从投资者预期的角度看，单位成本为 $\Phi_{t-1}\Psi_{t-1}^{-1}\underline{\iota}$ 收益为 $\Phi_{t-1}\Psi_{t-1}^{-1}\underline{R}_t$ 的资产组合 p，并没有明显的最优化特征。然而，按金融计量经济学家的观点，它们无疑是最优的，——它们是真实但未知

[18] 如果收益和 Q_t 每期不只抽样一次，这一观测结果是不成立的。例如，两期总收益（即将中间现金流完全再投资）$R_{it,t+1} = R_{it}R_{it+1}$，它满足两期矩条件 $E[Q_t Q_{t+1} R_{it,t+1} \mid I_{t-1}] = 1$。在这一情况下，构造的随机变量 $Q_t Q_{t+1} R_{it,t+1} - 1$ 遵从一阶移动平均过程。更完整的讨论参见 Hansen 和 Hodrick(1980)以及 Hansen、Heaton 和 Ogaki (1988)。

的对数似然函数的条件得分的最优保值组合。

换句话说，经济分析和计量经济分析在此交叉。计量经济学仅可观测矩条件的条件线性组合，并寻求收益能提供有关核定价$Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)$参数信息的资产组合。最优资产组合的权重是$\Phi_{t-1}\Psi_{t-1}^{-1}$，收益$\Phi_{t-1}\Psi_{t-1}^{-1}\underline{R}_t$使每一观测值的信息内容最大化，并导致关于$\underline{\theta}_Q$信息$\Phi_{t-1}\Psi_{t-1}^{-1}\Phi'_{t-1}$的增量贡献。换言之，真实得分的 Fisher 信息矩阵是$\Phi_{t-1}\Psi_{t-1}^{-1}\Phi'_{t-1}-C$，其中半正定矩阵 C 是由条件的矩条件之线性组合产生的此类矩阵中最小的一个。

这一发现产生了大量与条件期望评价有关联的执行问题。[19]确切地说，对于$\underline{z}_{t-1}\in I_{t-1}$，如果$\Phi_{t-1}$和$\Psi_{t-1}$是时间不变函数$\Phi(\underline{z}_{t-1})$和$\Psi(\underline{z}_{t-1})$，则它们可以用非参数方法进行估计。Robinson(1987)、Newey(1990)、Robinson(1991)和 Newey(1993)的方法将其拓展为目前的设定，其中$\underline{R}_tQ(\underline{X}_t,\underline{\theta}_Q)-\underline{\iota}$无序列相关，但不是时间上的或同方差的独立分布，这一拓展看起来直接明了。然而，A_{t-1}^0是z_{t-1}的时间不变函数的情况更象是一种例外而不是规则，相应地，为了进行条件矩约束的有效估计，计量经济学家通常必须对无套利定价模型设置更进一步的约束，这是下一节讨论的主题。

此外，计量经济学家可以采用更弱的矩条件，如无条件矩约束。这一情况的分析类似于最优条件的 GMM。再一次地说明，（2.10）的固定权重矩阵$A_T(\underline{\theta}_0)$是每单位成本为$A_T(\underline{\theta}_0)\underline{\iota}$、随机收益为$A_T(\underline{\theta}_0)\underline{R}_t$的组合 p 的权重。如前节所述，这些随机收益的价格为$\Phi_{t-1}\Psi_{t-1}^{-1}\underline{\iota}$。它一般不同于$E(A_{t-1}^0)\underline{\iota}$，这些资产组合产生了与真实但未知的对数似然函数的导数有最大无条件相关的固定权重矩条件。

当然，常规的 GMM 在如前所述的最优无条件 GMM 过程内使用条件信息，令$z_{t-1}\in I_{t-1}$代表一个 r×N 前定变量矩阵，并考虑改进的矩条件：

$$E[Z_{t-1}(\underline{R}_tQ(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)-\underline{\iota})\,|\,I_{t-1}]=E[Z_{t-1}(\underline{R}_tQ(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)-\underline{\iota})]=\underline{0}\quad\forall Z_{t-1}\in I_{t-1}\qquad(3.10)$$

在前面段落中，Z_{t-1}等于I_N，是 N×N 的单位矩阵。另外，它可以反映投资者所能得到的信息集的某些相同或不同的元素（即：分别为$I_N\otimes z_{t-1}$的z_{t-1}及在(2.19)中的z_{it-1}）。这些信息集被应用于前一节给出的$\underline{R}_tQ(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)-\underline{\iota}$中的每个元素。

[19] 就信息集本身的性质而言并不是问题。虽然投资者可能拥有比计量经济学家更多的信息，但这不成问题，因为期望迭代法则隐含$E[R_{it}Q_t\,|\,I_{t-1}^J]=1\forall I_{t-1}^J\subseteq I_{t-1}$，当然，这一矩条件隐含的条件概率$\pi_{st-1}^J$一般不同于$E[R_{it}Q_t\,|\,I_{t-1}]=1$所隐含的如核定价$Q_t^J$（即$q_{st-1}^J=\psi_{st-1}/\pi_{st-1}^J$）的有关值。如果$Q_t$模型中将每单位概率的状态价格$q_{st-1}^J$等于状态 s 接受一单位边际收益，$Q_t^J$对$\pi_{st-1}^J$的依赖就被打破。

将 z_{t-1} 和 z_{it-1} 引入(3.10)的无条件矩条件，通常被认为是遵循了 Hansen 和 Jagannathan(1991) 以及 Hansen 和 Jagannathan(1994)提出的用于估计和推断中的交易策略。会有出现这种特征是因为按积极型投资者的模式，证券收益在时间上，以及当 $\underline{z}_{it-1} \neq \underline{z}_{t-1}$ 时，在横截面上赋予不同的权重。在无条件 GMM 中，用这一方式加权的收益接着归并入资产组合 p，改进的权重以附加成分 Z_{t-1} 的形式作为信息加入（3.10）。

还有，对建立在 $Z_{t-1}(\underline{R}_t Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q) - \underline{\iota})$ 基础上的改进矩条件，存在一个最优固定权重资产组合策略。根据（2.20），资产组合权重为 $\Phi_z \Psi_z^{-1} Z_{t-1}$ 的积极型资产组合策略，有 $\Phi_z \Psi_z^{-1} Z_{t-1} \underline{R}_t$ 的随机收益，且每单位成本为 $\Phi_z \Psi_z^{-1} Z_{t-1} \iota$。对于有限样本，在随时间变化而权重是前定变量固定线性组合的一类投资组合内，最终得出的矩条件与真实但未知的无条件得分有着最大的无条件相关。当然，上述最优条件权重可通过对（3.9）式进行适当调整得到，采取这一途径的总体观点是力求对最优过程的线性近似简捷明了。

4．各种 beta 定价公式的效率增益

矩条件 $E[Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q) R_{it} \mid I_{t-1}] = 1$ 经常被转换成 beta 定价模型的形式，之所以如此是它与由资本资产定价模型（CAPM）产生的期望收益关系相似。在目前的设定中，beta 定价模型有另外一种目的，它们强调了特定的维度，在此维度内可以对核定价模型添加富有成效的约束以进行更有效的估计和推断。换句话说，beta 定价模型指出了允许对 A_{t-1}^0 的成分进行一致估计的假设。

相应地考虑风险资产收益向量 $\underline{R}_t$ 在 $Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q)$ 的总体投影：

$$\begin{aligned} \underline{R}_t &= \underline{\alpha}_t + \underline{\beta}_t Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q) + \underline{\varepsilon}_t; E[\underline{\varepsilon}_t \mid I_{t-1}] = 0 \\ \underline{\beta}_t &= \frac{\operatorname{cov}[\underline{R}_t, Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q) \mid I_{t-1}]}{\operatorname{var}[Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q) \mid I_{t-1}]} \end{aligned} \tag{4.1}$$

$Var[\bullet]$ 和 $Cov[\bullet]$ 分别代表方差和协方差，资产定价理论将截距向量 $\underline{\alpha}_t$ 限制于该投影中，$\underline{\alpha}_t$ 由(4.1)代入矩条件(3.6)得到：

$$\underline{\iota} = E[\underline{R}_t Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q) \mid I_{t-1}] = \underline{\alpha}_t E[Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q) \mid I_{t-1}] + \underline{\beta}_t E[Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q)^2 \mid I_{t-1}] \tag{4.2}$$

将上式整理并代入(4.1)得：

$$\begin{aligned} \underline{R}_t &= \underline{\iota}\lambda_{0t} + \underline{\beta}_t [Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q) - \lambda_{Qt}] + \underline{\varepsilon}_t; E[\underline{\varepsilon}_t \mid I_{t-1}] = 0; \\ \lambda_{0t} &= E[Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q) \mid I_{t-1}]^{-1}; \lambda_{Qt} = \lambda_{0t} E[Q(\underline{x}_t, \underline{\theta}_Q)^2 \mid I_{t-1}] \end{aligned} \tag{4.3}$$

如果存在无风险资产，则其收益为 λ_{0t}；否则，λ_{0t} 是所有收益与 Q_t 无关的资产的*预期*收益。如前所述，假设残差向量 $\underline{\varepsilon}_t$ 无序列相关是计量经济学方法上的方便而已。

(4.3)的双线性形式是这些 beta 定价模型的独特特征。换句话说，矩条件(3.6)限定了核定价与收益的协方差之中的期望收益为线性形式，该线性结构是无摩擦市场中所有以无套利为基础的模型的主要特征；即，具有收益与Q_t最大相关性的资产组合是条件均值—方差有效的。[20]因而，这些资产定价关系在对风险溢价，如λ_{Qt}和λ_{0t}的约束上不同于半参数多变量回归模型。[21]

这些无套利模型的多变量表达式产生一个算法相同但有某种程度差别的有效 GMM 估计。估计量是建立在如下矩条件的基础之上的：

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\sum_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}} A_{\beta t-1}\underline{\hat{\varepsilon}}_t = \underline{0};\ \underline{\hat{\varepsilon}}_t = \underline{\mathrm{R}}_{\mathrm{t}} - \underline{\iota}\,\hat{\lambda}_{0\mathrm{t}} - \underline{\hat{\beta}}_t[\mathrm{Q}(\underline{\mathrm{x}}_{\mathrm{t}},\underline{\hat{\theta}}_{\mathrm{Q}}) - \hat{\lambda}_{0t}] \tag{4.4}$$

并且，在上式中解出λ_{0t}和λ_{Qt}（特别地，$E[Q(\underline{x}_t,\theta_Q)-\lambda_{Qt}\mid I_{t-1}]=-\lambda_{0t}Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]$），并提供充分的正则性使得在积分号下可微时，$A^0_{\beta t-1}$的最优选择是：

$$\begin{aligned}
A^0_{\beta t-1} &= \Phi_{\beta t-1}\Psi^{-1}_{\beta t-1};\\
\Psi_{\beta t-1} &= \Psi_{t-1} - \underline{\beta}_t\underline{\beta}'_t Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}] = E[\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}'_t\mid I_{t-1}]\\
\Phi_{\beta t-1} &= E\{\frac{\partial\underline{\varepsilon}'_t}{\partial\underline{\theta}_Q}\mid I_{t-1}\}\\
&= \lambda_{0t}(Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]\frac{\partial\underline{\beta}'_t}{\partial\underline{\theta}_Q} + \frac{\partial Var[Q(\underline{x}_t,\overline{\underline{\theta}}_Q)\mid I_{t-1}]}{\partial\underline{\theta}_Q}\underline{\beta}'_t)\\
&\quad - \frac{\partial\lambda_{0t}}{\partial\underline{\theta}_Q}(\underline{\iota} - Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]\underline{\beta}_t)'\\
&= \lambda_{0t}\frac{\partial Cov[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q),\underline{R}_t\mid I_{t-1}]'}{\partial\underline{\theta}} - \frac{\partial\lambda_{0t}}{\partial\underline{\theta}_Q}(\underline{\iota} - Cov[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q),\underline{R}_t\mid I_{t-1}])'
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$\Phi_{\beta t-1}$表达式的最后一行表明它与前节中(3.9)的关系。应注意的是，无风险利率的观测值略去了$\partial\lambda_{0t}/\partial\underline{\theta}_Q$项。[22]

除非计量经济学家希望对收益遵循的随机过程作附加假设，否则在 beta 定价形式下构建无套利模型没有一般性的好处。[23]很明显，只有三个地方可以对 beta 定价模型施加有用的约束：(1)

---

[20] 如果给定的（条件）期望收益水平使资产组合的（条件）方差最小化，资产组合是（条件）均值——方差有效的。对于一个给定资产集合，当且仅当在这一集合的所有资产（条件）预期收益与资产组合（条件）协方差为线性时，资产组合是（条件）均值——方差有效的。参见 Merton(1972)，Roll(1977)以及 Hansen 和 Richard(1987).

[21] 它们至少在另一方面不同——许多有着无序列相关误差的回归设定有$E[\underline{\varepsilon}_t\mid Q_t]=\underline{0}$，未必满足(4.3)。

[22] 对风险中性定价情况，$\Phi_{\beta t-1}$简化为$-(\partial\lambda_{0t}/\partial\underline{\theta})\underline{\iota}$，因为在计量经济学家度量无风险利率时$Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]$为 0 或趋于 0。

[23] 由于期望迭代法则不适用于这些多变量回归模型的二阶矩，以致单凭这些表达式对提高无条件 GMM 估计量的敏锐性不起作用。因为 beta 定价模型的双线性形式，将附加的协方差引入本文从条件到无条件的矩。证券 i 无条件的矩条件为$E[\varepsilon_{it}\underline{z}_{it-1}\mid I_{t-1}]=E[\varepsilon_{it}\underline{z}_{it-1}]=\underline{0}\forall\underline{z}_{it-1}\in I_{t-1}$，并且两个协方差之和$Cov\{\beta_{it}(E[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta})-\lambda_{Qt})\mid I_{t-1}],\underline{z}_{it-1}\}+Cov\{\beta_{it},(E[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta})-\lambda_{Qt})]E[\underline{z}_{it-1}]$在没有更多的约束时是

对条件 beta 行为的约束；(2)对模型$Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)$的附加约束；（3）对回归残差附加约束。4.1—4.3 节将依次讨论其中的每一项，4.4 节将综合这些要素。

4.1 条件 beta 模型

条件 beta 模型的优点很明显。条件 beta 模型通过对带有协方差（即$E[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)R_{it}\mid I_{t-1}]=Cov[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q),R_{it}\mid I_t]+\lambda_{0t}^{-1}E[R_{it}\mid I_{t-1}]$）的模型施加更为严格的一般矩约束(3.6)促进核定价模型$Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)$的估计，它们还可以消除一些与资产定价关系效率有关联的问题，换句话说，在这一例子中，计量经济学家明显对$\Phi_{\beta t-1}$的一些分量建模。

相应地，假设计量经济学家观测变量集$\underline{z}_{t-1}\in I_{t-1}$，可能包含于$\underline{x}_t$中（即$\underline{z}_{t-1}\in\underline{x}_t$），并且设定一个如下形式的模型：

$$\underline{\beta}_t=\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta);\underline{z}_{t-1}\in I_{t-1} \tag{4.6}$$

其中，$\underline{\theta}_\beta$是$\underline{\beta}_t$模型中未知参数的向量。在这些条件下，beta 定价模型变为：

$$\underline{R}_t=\underline{\iota}\lambda_{0t}+\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)-\lambda_{Qt}]+\underline{\varepsilon}_{\beta t} \tag{4.7}$$

在该模型最普通的形式中，条件 beta 是常数，$\underline{z}_{t-1}$简化为标量 1，$\underline{\theta}_\beta$是相应的常数条件$\underline{\beta}$向量。给定常数条件 beta，所有收益中的序列相关因风险溢价而解决。[24]

通过精心考虑最优权重矩阵，条件 beta 模型可使有效 GMM 估计更具有可行性。因为：

$$\begin{aligned}\Phi_{\beta Zt-1}&=E\{\frac{\partial\underline{\varepsilon}'_{\beta t}}{\partial\underline{\theta}}\mid I_{t-1}\}\\&=\lambda_{0t}(Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]\frac{\partial\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)'}{\partial\underline{\theta}}+\frac{\partial Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]}{\partial\underline{\theta}}\times\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)')\\&-\frac{\partial\lambda_{0t}}{\partial\underline{\theta}}(\underline{\iota}-Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta))'\end{aligned} \tag{4.8}$$

其中，与前面一样，观测到的无风险比率略去了(4.8)的最后一行。因为参数向量$\underline{\theta}$为$(\underline{\theta}'_Q\underline{\theta}'_\beta)'$，(4.5)中$\Phi_{\beta Zt-1}$和$\Phi_{\beta t-1}$有两方面的不同：

不可分的。

[24] $\beta_{it}=\theta'_{i\beta}S_{i\beta}z_{t-1}$形式的线性模型也是共同的，其中$S_{i\beta}$是取$z_{t-1}$中对$\beta_{it}$合适的元素组成的矩阵。当 APT 在条件和非条件下均成立时(参见 Lehmann(1992))时候，条件 beta 的线性模型自然就被提出来了。一些商业风险管理模型允许$\underline{\theta}_{i\beta}$既随证券又随时间而变化；早期例子参考 Rosenberg(1974)以及 Rosenberg 和 Marathe (1979)。当它们的残差与工具变量$z_{t-1}\in I_{t-1}$正交时，误差项可以添加进这些条件β模型。非线性模型可以被计量经济学家作为$\Phi_{\beta t-1}$的相关组成部分的设定。

$$E\{\frac{\partial\underline{\varepsilon}'_t - \partial\underline{\varepsilon}'_{\beta t}}{\partial\underline{\theta}_Q} \mid I_{t-1}\}$$
$$= \lambda_{0t}(\frac{\partial Cov[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q),\underline{R}_t \mid I_{t-1}]'}{\partial\underline{\theta}} - \frac{\partial Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]}{\partial\underline{\theta}}\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta))'E\{\frac{\underline{\varepsilon}'_{\beta t}}{\partial\underline{\theta}_\beta}\mid I_{t-1}\} \quad (4.9)$$
$$= \lambda_{0t}Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]\frac{\partial\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)'}{\partial\underline{\theta}}$$

一个使用分块矩阵求逆的冗长计算证明有效 GMM 估计量θ_Q的方差在使用了条件 beta 模型后变小了，不仅因为在(4.9)的第一行将$Cov[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q),\underline{R}_t \mid I_{t-1}]$的导数转化为$Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]$的导数时降低了维数，也因为式(4.9)的第二行的条件 beta 模型的产生的附加矩条件。

因而，构造(3.9)中核定价的导数和收益之间的协方差的估计问题在某种程度上被更简单的问题所代替，即在这些模型中估计核定价的条件方差及这些模型的导数。两个公式都要求通过λ_{0t}估计$Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)$的条件均值及其导数，这一要求可因考察无风险资产而消除。虽然计算$E[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]$、$Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]$及它们的导数时需要随机过程的假设，但条件β模型在可能的情况下，在衡量无风险比率时，相当程度上简化了有效 GMM 估计。[25]

同时注意最优条件权重矩阵$\Phi_{\beta t-1}\Psi^{-1}_{\beta t-1}$有一个类似于最后一节的资产组合解释。在金融计量学中，该证券组合的解释可以追溯得很远。忽略尺度因子，与估计溢价λ_{Qt}有关的资产组合权重与$\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)$成比例。同样，在使$Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid \underline{I}_{t-1}]$尺度化为 1 后，与$\lambda_{0t}$估计相关联的资产组合权重与$\underline{\iota}-\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)$成比例，正象计量经济学家观察到资产组合的收益与$Q_t$而不是$Q_t$模型本身密切相关一样（这一情况将在下面简要讨论）。Douglas(1968)和 Lintner(1965)通过假设收益和常数 beta 独立同分布已使用了这一方法，并由 Black、Jensen 和 Scholes(1972),Miller 和Scholes(1972)、Fama和Macbeth(1973)将其充分发展成为一项广泛使用的工具。Shanken(1992)对当前独立同分布假定的技巧进行了综合而严密的描述。

条件 beta 的决定因素模型有另外一个用途——它们使得在无明确的核定价Q_t模型的条件下，对无套利模型的多方面的识别成为可能。仅给定$\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)$，期望收益为：

$$E[\underline{R}_t \mid I_{t-1}] = \underline{\iota}\lambda_{0t} + \underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)[\lambda_{pt}-\lambda_{0t}] \quad (4.10)$$

因为在这一清单内资产的期望收益在其条件 beta 中是线性的，所以潜在可估计的条件风险溢价

[25] 在(4.8)中出现$Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]$及其导数是因为(4.6)的条件 beta 模型，而不是条件协方差模型。在大部分应用中，条件 beta 模型更合适。

λ_{0t} 和 λ_{pt} 是条件均值—方差有效证券组合的期望收益。[26] 然而，这些参数也是具有单位成本且条件 beta 分别为 1 与 0 时任意资产组合的期望收益。所构造的具有给定 beta 的组合在文献中通常被称为模拟或基础组合。[27]

在这一例中模拟资产组合产生于有效条件 GMM 估计的资产组合的解释，并且界定了可从条件 beta 模型单独得到的内容。仅假设给出 beta 模型(4.6)：

$$\underline{R}_t = \underline{\iota}\lambda_{0t} + \underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)[\lambda_{pt}-\lambda_{0t}] + \underline{\varepsilon}_{\beta pt} \quad ;$$

$$\Psi_{\beta pt-1} = E\left[\underline{\varepsilon}_{\beta pt}\underline{\varepsilon}'_{\beta pt}\middle| I_{t-1}\right]$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\beta pt-1} = (\lambda_{pt}-\lambda_{0t})\frac{\partial\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)'}{\partial\underline{\theta}} + \frac{\partial\lambda_{0t}}{\partial\underline{\theta}}[\underline{\iota}-\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)]' \\ + \frac{\partial\lambda_{pt}-\lambda_{0t}}{\partial\underline{\theta}}\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)'\end{aligned} \tag{4.11}$$

应注意的是，如果在每一时期将风险溢价视作未知参数，有限的参数空间将是无限维的，忽略这一明显的问题，最优条件矩约束为：

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T}\begin{bmatrix}(\lambda_{pt}-\lambda_{0t})\dfrac{\partial\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)'}{\partial\theta_\beta} \\ \underline{\iota}' \\ \underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)'\end{bmatrix}\Psi^{-1}_{\beta pt-1} \\ \times[\underline{R}_t - \underline{\iota}\lambda_{0t} - \underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)(\lambda_{pt}-\lambda_{pt})] = 0\end{aligned} \tag{4.12}$$

各个 λ_{0t} 及 $\lambda_{pt}-\lambda_{0t}$ 的解分别是：

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\hat{\lambda}_{0t} \\ \hat{\lambda}_{pt}-\hat{\lambda}_{0t}\end{bmatrix} = [(\underline{\iota}\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta))'\Psi^{-1}_{\beta pt-1}(\underline{\iota}\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta))]^{-1} \\ \times(\underline{\iota}\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta))'\Psi^{-1}_{\beta pt-1}\underline{R}_t\end{aligned} \tag{4.13}$$

---

[26] CAPM 是取这一形式的最著名的模型，其中资产组合 p 是所有风险资产的市场证券组合。市场证券组合收益一般与 CAPM 中的总财富（在这一模型中与 Q_t 成比例）呈最大相关。如果市场是完全的，它就完全相关。

[27] 有关的讨论参考 Grinblatt 和 Titman(1987),Huberman、Kandel 和 Stambaugh(1987),Lehmann(1987), Lehmann 和 Modest(1988), Lehmann(1990)和 Shanken(1992)。在计量经济术语中，产生于任意矩阵 Γ 的横截面回归模型的资产组合权重可以解规划问题：

$$\min_{w_{\Gamma pt-1}} \underline{w}'_{\Gamma pt-1}\Gamma\underline{w}_{\Gamma pt-1} \text{ 满足 } \underline{w}'_{\Gamma pt-1}\underline{\iota}=1 \text{ 和 } \underline{w}'_{\Gamma pt-1}\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)=1$$

$$\min_{\underline{w}_{\Gamma 0t-1}} \underline{w}'_{\Gamma 0t-1}\Gamma\underline{w}_{\Gamma 0t-1} \text{ 满足 } \underline{w}'_{\Gamma 0t-1}\underline{\iota}=1 \text{ 和 } \underline{w}'_{\Gamma 0t-1}\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)=1$$

普通最小二乘法对应于 $\Gamma = I$，加权最小二乘法对应于 $\Gamma = Diag\{Var[\underline{R}_t \mid I_{t-1}]\}$ 和广义最小二乘法对应于 $\Gamma = Var[\underline{R}_t \mid I_{t-1}]$。

它实际上是成本分别为 0 或 1 单位，且具有条件 beta 为 0 或 1 的资产组合实际的而非期望的收益。

因而，仅给定条件 beta 模型，风险资产收益所衡量的内容有三个相关的限制。首先，对于任意的 $\varphi \neq 0$，条件 beta 模型仅在尺度内是可识别的，即 $\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1}, \underline{\theta}_{\beta})(\lambda_{pt} - \lambda_{0t})$ 等于 $\varphi \underline{\beta}(\underline{z}_{t-1}, \underline{\theta}_{\beta})(\lambda_{pt} - \lambda_{0t}) / \varphi$；其次，资产组合收益 $\hat{\lambda}_{0t}$ 和 $\hat{\lambda}_{pt} - \hat{\lambda}_{0t}$ 分别具有期望收益为 λ_{0t} 和 $\lambda_{pt} - \lambda_{0t}$，但期望收益仅可用明确的 $E[\underline{R}_t \mid I_{t-1}]$ 时间序列模型再现；[28] 第三，核定价 Q_t 不能用这一模型再现——仅有 R_{pt}，即与 Q_t 最大相关的 N 个风险资产组合的收益，可以从 $\hat{\lambda}_{pt}$ 的极限（即，如 $\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1}, \hat{\underline{\theta}}_{\beta}) \xrightarrow{p} \underline{\beta}(\underline{z}_{t-1}, \underline{\theta}_{\beta})$）识别。

4.2 多因子模型

另一个方便估计和推断的参数假设是 Q_t 的线性模型。文献中典型的线性模型同时强化和弱化了有关核定价的假设。显然，线性要比其它可能的非线性函数形式受更多约束。然而，线性模型的假设通常较弱：Q_t 接近于一个未知参数向量，因为权重通常被视为不可观测变量。

一些均衡模型限定 Q_t 为资产组合收益的线性组合（也就是资产组合）。在跨期资产定价理论中，这些资产组合让投资者规避投资机会的波动（参见 Merton(1973) 和 Breeden(1979)）。有关的结果可由资产组合分割理论得到。该理论认为，这种组合对于特定的偏好（参见 CASS(1970)），或者对于特定的收益分布是最优的（参见 Ross(1978a)）。同样，Ross(1976) 和 Ross (1977) 的套利定价理论（APT）结合了无套利假设和描述分散化预期的分布假设，从而得出 Q_t 的近似线性模型。[29]

在这些情况下，核定价 Q_t（通常没有作任何通涨调整）沿用线性模型：

$$Q_t = \underline{\omega}'_{xt-1} \underline{x}_t + \underline{\omega}'_{mt-1} \underline{R}_{mt}; \quad Q_t > 0; \quad \underline{\omega}_{xt-1}, \underline{\omega}_{mt-1} \in I_{t-1} \tag{4.14}$$

其中，$\underline{x}_t$ 是非资产收益变量的向量，R_{mt} 是资产组合收益的向量。除了模型建立在 t-1 时可得信息的基础上，以及它们导致 Q_t 严格为正的要求之外，这些模型通常对（未观测）权重 $\underline{\omega}_{xt-1}$ 和 $\underline{\omega}_{mt-1}$ 不作约束。[30] 换句话说，当 $\underline{\omega}_{xt-1}$ 和 $\underline{\omega}_{mt-1}$ 参数化为 $\underline{\omega}_x(\underline{z}_{t-1}, \underline{\theta})$ 和 $\underline{\omega}_m(\underline{z}_{t-1}, \underline{\theta})$ 时，模型取

[28] λ_{0t} 和 $\lambda_{pt} - \lambda_{0t}$ 的矩可以被估计。例如，$\hat{\lambda}_{0t}$ 和 $\hat{\lambda}_{pt} - \hat{\lambda}_{0t}$ 对 $z_{t-1} \in I_{t-1}$ 的投影在大样本时再现 λ_{0t} 和 $\lambda_{pt} - \lambda_{0t}$ 对 $\underline{z}_{t-1} \in I_{t-1}$ 的无条件投影。

[29] Ross(1976)和 Ross(1977) 提出的 APT 在识别 Q_t 中对资产价格施加的约束不足，为了获得表达式(4.14)，必须对偏好和投资机会添加足够的约束，以使可分散的风险不具有风险溢价。

[30] 对线性模型施加正(positivity)约束有时是很困难的。

更一般的形式$Q(\underline{x}_t,\underline{\theta})$。

因此，考虑线性条件多因子模型：

$$\underline{R}_t=\underline{\alpha}_t+B_x(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bx})\underline{x}_t+B_m(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_m)\underline{R}_{mt}+\underline{\varepsilon}_{Bt} \tag{4.15}$$

施加矩条件(2.6)得出与截距向量有关的约束：

$$\begin{aligned}\underline{\alpha}_t&=[\underline{\iota}-B_m(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bm})\underline{\iota}]\lambda_{0t}-B_x(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bx})\underline{\lambda}_{xt}\\ \underline{\lambda}_{xt}&=\lambda_{0t}[E[\underline{x}_t\underline{x}'_t\mid I_{t-1}]\underline{\omega}_{xt-1}+E[\underline{x}_t\underline{R}'_{mt}\mid I_{t-1}]\underline{\omega}_{mt-1}]\end{aligned} \tag{4.16}$$

所以，原则上$\underline{\omega}_{xt-1}$及$\underline{\omega}_{m-1}$可以从$\underline{\lambda}_{xt}$的表达式反转求出，最后将这一期望收益关系代入多因子模型得：

$$\begin{aligned}\underline{R}_t=\underline{\iota}\lambda_{0t}+B_x(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bx})[\underline{x}_t-\underline{\lambda}_{xt}]+B_m(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bm})[\underline{R}_{mt}-\underline{\iota}\lambda_{0t}]\\ +\underline{\varepsilon}_{Bt};E[\underline{\varepsilon}_{Bt}\mid I_{t-1}]=\underline{0}\end{aligned} \tag{4.17}$$

还有，因为期望收益可由因子载荷矩阵$B(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_B)$和1组成的向量扩张生成，残差向量具有条件0均值，[31]很明显，这一模型要求估计条件均值向量和$(\underline{x}'_t\underline{R}'_{mt})'$的协方差矩阵。

应注意的是，我们没有对(4.17)中$E[\underline{R}_{mt}\mid I_{t-1}]$施加任何约束。如果计量经济学家观测收益$\underline{R}_{mt}$及变量$\underline{x}_t$时没有$Q_t$的附加信息，因$\underline{R}_{mt}$与$Q_t$缺乏相联系的模型，从而消除了对$E[\underline{R}_{mt}\mid I_{t-1}]$的约束，这一约束产生于矩条件$E[\underline{R}_{mt}Q_t\mid I_{t-1}]=\underline{\iota}$。如果按(4.10)—(4.13)观测资产组合p的收益，同样的结论也将成立。换句话说，收益$\underline{R}_{mt}$或R_{pt}的线性组合为Q_t提供了无尺度（scale-free）的替代。在Q_t模型缺少数据的条件下，资产定价的关系解释了相对的资产价格及期望收益，而不是资产价格水平和风险溢价水平。

如同施加条件beta模型，线性因子模型通过弱化信息要求简化估计和推导。比起上一节的条件beta模型，核定价的线性化有3个适度的优点：（1）不再要求$Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)$条件均值和方差的导数；（2）含有$\underline{x}_t$和$\underline{R}_{mt}$的条件协方差矩阵不包含未知的模型参数（与$Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]$相对照）；及（3）线性模型允许$\underline{\omega}_{xt-1}$和$\underline{\omega}_{m-1}$保持不可观测。第三点的成立是以模型对资产价格及风险溢价的水平不设置约束为代价的。还有，如果存在可观测的无风险利率时，模型能够得到进一步的简化。

多因子模型也可取既定（prespecified）beta 模型的形式。这些模型的分析类似于(4.10)

---

[31] 因为上述的多因子模型按Q_t计算，$[\underline{\iota}-B_m(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bm})\underline{\iota}]'$将不等同于0，在$Q_t$与潜在的共同因子没有明显联系的多因子模型中，这仍是可能的，对这一问题的讨论参见Huberman、Kandel和Stambaugh(1987)， Huberman和Kandel（1987）以及Lehmann和Modest（1988）。

——(4.13)中的单 beta 的情况。条件因子载荷模型$B(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_B)$仅可在尺度内被识别，且计量经济学家最多可以估计最小方差基础组合的收益，每个资产组合具有一个因子的载荷为 1，其余因子的载荷为 0。根据单 beta 模型，这些权重随时间变化的最优基础资产组合的组合，有着与Q_t最大相关的收益，或等价地，在这一多因子既定 beta 模型中，$B(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_B)$的线性组合与条件$\underline{\beta}_t$成比例。

4.3 多样化残差模型和大横截面下的估计

这些模型经常有另一种简化的假设：在横截面上，残差向量仅有弱相关。该约束是 APT 的主要假定。这意味着残余风险可因大的、非常分散化的资产组合而被消除，出于同样的原因，它是计量经济学上的简便做法；残差对估计的影响可通过大横截面中的分散化来消除。

就定价模型的有效估计而言，这一假定方便了$\Psi_{\beta t-1}$的估计。$\Psi_{\beta t-1}$是有效 GMM 权重矩阵的余留部分。确切地说，有效估计可以要求(4.7)中的$\Psi_{\beta t-1}$以$\Psi(\underline{z}_{t-1})$形式建模。然而，除 4.2 节的因子模型之外，计量经济学家，尤其是使用半参数方法的经济学家，不太可能拥有这一形式的可靠先验信息。

因而，考虑将线性因子模型加入到条件 beta 模型中，再次考虑投影：[32]

$$\begin{aligned}\underline{R}_t = \underline{\alpha}_t + \underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q) + B_x(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bx})\underline{x}_t \\ +B_m(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bm})\underline{R}_{mt} + \underline{\varepsilon}_{\beta Bt}\end{aligned} \tag{4.19}$$

并将定价关系应用于截距向量：

$$\underline{\alpha}_t = [\underline{\iota} - B_m(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bm})\underline{\iota}]\lambda_{0t} - \beta(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)\lambda_{Qt} - B_x(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bx})\underline{\lambda}_{xt} \tag{4.20}$$

整理后代入(4.19)，得：

$$\begin{aligned}&\underline{R}_t = \underline{\iota}\lambda_{0t} + \underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q) - \lambda_{Qt}] + B_x(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bx})[\underline{x}_t - \underline{\lambda}_{xt}] \\ &\qquad + B_m(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bm})[\underline{R}_{mt} - \underline{\iota}\lambda_{0t}] + \underline{\varepsilon}_{\beta Bt} \\ &\lambda_{Qt} = \lambda_{0t}E[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)^2 \mid I_{t-1}] \\ &\Psi_{\beta Bt-1} = E[\underline{\varepsilon}_{\beta Bt}\underline{\varepsilon}'_{\beta Bt} \mid I_{t-1}] \\ &\underline{\lambda}_{xt} = \lambda_{0t}E[\underline{x}_t Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q) \mid I_{t-1}]\end{aligned} \tag{4.21}$$

当所有这些成分都出现在模型中，假设由 1 组成的向量不位于$B_x(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bx})$或$B_m(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bm})$生成的列中。

这一公式包括了前面各节中的所有模型。当$B_x(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bx})$和$B_m(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bm})$等于 0 时，由(4.21)得出条件 beta 模型(4.7)，或者在无核定价模型$Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)$下，得出既定 beta 模型(4.11)。同样地，当$\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)$等于 0 时，方程(4.21)得出可观测的线性因子模型(4.17)，或者当无$\underline{x}_t$及

$\underline{R}_{mt}$ 的观测值时产生类似既定 beta 模型的多因子模型。当所有的构成部分都同时包括时，在条件 beta 模型(4.7)中，条件因子模型对残差 $\Psi_{\beta t-1}$ 的条件协方差矩阵的结构产生影响。

这一因子模型体现的不仅仅是模型精美程度的差异——它使得对条件方差矩阵 $\Psi_{\beta Bt-1}$ 施加先验约束成为可能。就条件 beta 模型(4.7)而言，残差的协方差矩阵 $\Psi_{\beta t-1}$ 在这一模型中有一个可观测的因子结构：[33]

$$\Psi_{\beta t-1} = (B_x(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bx})B_m(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bm}))Var\left[\begin{pmatrix}\underline{x}_t\\ \underline{R}_{mt}\end{pmatrix} \mid I_{t-1}\right]\times\begin{pmatrix}B_x(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bx})'\\ B_m(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{mx})'\end{pmatrix}+\Psi_{\beta Bt-1} \tag{4.22}$$
$$\equiv B_{\beta Bt-1}V_{\beta Bt-1}B'_{\beta Bt}+\Psi_{\beta Bt-1}$$

而它的逆为：

$$\Psi^{-1}_{\beta t-1}=\Psi^{-1}_{\beta Bt-1}-\Psi^{-1}_{\beta Bt-1}B_{\beta Bt}(V_{\beta Bt-1}+B'_{\beta Bt-1}\Psi^{-1}_{\beta Bt-1}B'_{t-1})^{-1}\times B'_{\beta Bt-1}\Psi^{-1}_{\beta Bt-1} \tag{4.23}$$

因而，因子模型提供了定价模型有效估计所需的最终输入。

Chamberlain 和 Rothschild(1983)给出了对诸如 $\underline{\varepsilon}_{\beta Bt}$ 的残差多样化约束的简便特征。他们假设当资产数目无限增大时，条件残差协方差矩阵 $\Psi_{\beta Bt-1}$ 的最大特征值有界。对弱大数定律的应用而言，这一条件是充分的，因为对一个权重为 1/N 阶（即当 $N\to\infty$, $\forall \underline{w}_{t-1}\in I_{t-1}$, $\underline{w}'_{t-1}\underline{w}_{t-1}\to 0$）的资产组合，其残差方差收敛于 0 当 $N\to\infty$，由于 $\sigma^2_{wt}=\underline{w}'_{t-1}\Psi_{\beta Bt-1}\underline{w}_{t-1}\le \underline{w}'_{t-1}\underline{w}_{t-1}\xi_{\max}(\Psi_{\beta Bt-1})\to 0$，其残差方差收敛于 0，其中 $\xi_{\max}(\bullet)$ 表示最大特征值。

不幸的是，受有界性条件的限制，没有显而易见的方法来估计 $\Psi_{\beta Bt-1}$。[34] 因而在实践中施加的多样化约束，通常包括对严格因子结构更强的假设：即 $\Psi_{\beta Bt-1}$ 是对角阵。当然，当广义最小二乘法适用的情况下，对角矩阵的设定并不能保证会比单位矩阵（即普通最小二乘法）有更高效率的估计量。正如除多样化条件 $\lim_{N\to\infty}\xi_{\max}(\Psi_{\beta Bt-1})<\infty$ 之外，$\Psi_{\beta Bt-1}$ 是无约束时的情况。而加权最小二乘法事实上在大多数应用中可能是占优势的，若这一对角设定不成立，保守的推断法仍可采用。在任何情况下，在对角设定中，计量经济学家允许对特殊（idiosyncratic）方差的极大依赖。

假若将弱法则应用于残差，GMM 估计量在大横截面情况下的表现会是如何呢？为了方便大 N 情况的分析，在残差 $\varepsilon_{\beta BNt}$ 和有关联的参数向量，以及矩阵

[32] 当然，如果 $(\underline{x}'_t\underline{R}'_{mt})$ 和 $Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_0)$ 是线性相关的，$(\underline{x}'_t\underline{R}'_{mt})$ 的一个元素必须删除。

[33] 只要相关联的条件 beta 是常数，也可加入不可观测因子模型。因为这一应用中的残差是无序列相关的,所以 Chamberlain 和 Rothschild(1983)，Connor 和 Korajczyk(1988)以及 Lehmann 和 Modest(1988)针对独立同分布情况的提出该方法。Lehmann(1992)讨论了序列相关的情况。

[34] 最近，Ledoit(1994)提出一种特征值的收缩估计量（Shrinkage estimator）来估计协方差矩阵，该法可能适用于此处。

$\underline{\beta}_N(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{\beta N}), B_{xN}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{BxN}), B_{mN}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{BmN})$ 和 $\Psi_{\beta BNt-1}$ 中加进下标 N，并在证券数目不断增加时，通过增加向量的元素和矩阵的行，取 N 无限增加时的所有极限。任意的 GMM 估计量可由下式计算：

$$\frac{1}{NT}\sum_{t=1}^{T} A_{\beta BNt-1}\hat{\underline{\varepsilon}}_{\beta BNt} = \underline{\theta}$$

$$\begin{aligned}\hat{\underline{\varepsilon}}_{\beta BNt} &= \underline{R}_t - \underline{\iota}\hat{\lambda}_{0t} - \underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\hat{\underline{\theta}}_{\beta N})[\underline{Q}(\underline{x}_t,\hat{\underline{\theta}}_Q) - \hat{\lambda}_{Qt}] - B_{xN}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{BxN})[\underline{x}_t - \hat{\lambda}_{xt}] \\ &\quad - [B_{mN}(\underline{z}_{t-1},\hat{\underline{\theta}}_{BmN})][\underline{R}_{mt} - \underline{\iota}\hat{\lambda}_{0t}]\end{aligned} \tag{4.24}$$

其中，$A_{\beta BNt-1}$ 是计量经济学家选定的 $p\times N$ 的 $0_P(1)$ 矩阵序列，当 $N\to\infty$，且 $\xi_{\min}(A'_{\beta BNt-1}A_{\beta BNt-1})\to\infty$ 时，它们是满行秩的，其中 $\xi_{\min}(\bullet)$ 是的最小特征值，后一条保证权重分散于不同证券，而不是仅集中于几种资产。

当残差可分散时，估计方程(4.24)揭示了大横截面的优点。样本和总体残差的联系如下：

$$\begin{aligned}\hat{\underline{\varepsilon}}_{\beta BNt} &= \underline{\varepsilon}_{\beta BNt} + \underline{\iota}(\lambda_{0t} - \hat{\lambda}_{0t}) + \{\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{\beta})[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q) - \lambda_{Qt}] \\ &\quad - \underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\hat{\underline{\theta}}_{\beta N})[Q(\underline{x}_t,\hat{\underline{\theta}}_Q) - \hat{\lambda}_{Qt}]\} \\ &\quad + [B_{xN}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{BxN}) - B_{xN}(\underline{z}_{t-1},\hat{\underline{\theta}}_{BxN})]\underline{x}_t \\ &\quad + [B_{xN}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{BxN})\underline{\lambda}_{xt} - B_{xN}(\underline{z}_{t-1},\hat{\underline{\theta}}_{BxN})\hat{\underline{\lambda}}_{xt}] \\ &\quad + [B_{mN}(\underline{z}_{t-1},\hat{\underline{\theta}}_{BmN}) - B_{mN}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{BmN})]\underline{R}_{mt} \\ &\quad + [B_{mN}(\underline{z}_{t-1},\hat{\underline{\theta}}_{BmN})\underline{\iota}\hat{\lambda}_{0t} - B_{mN}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{BmN})\underline{\iota}\lambda_{0t}\}\end{aligned} \tag{4.25}$$

它的第一个构成成分是总体残差向量 $\underline{\varepsilon}_{\beta BNt}$，其余成分代表总体模型与拟合部分的差异。显然，$\underline{\varepsilon}_{\beta BNt}$ 可通过分散化加以消除，将 $A_{\beta BNt-1}$ 应用于 $\hat{\underline{\varepsilon}}_{\beta BNt}$ 可实现这一点，因为当资产的数目无限增加时，它对每一资产赋予了 1/N 阶的隐含权重。

然而，由于总体模型与拟合部分的差异，分散的作用有一定限度。例如，$Q(\underline{x}_t,\hat{\underline{\theta}}_Q), \hat{\lambda}_{Qt}, \hat{\lambda}_{xt}, B_{xN}(\underline{z}_{t-1},\hat{\underline{\theta}}_{BxN}), B_{mN}(\underline{z}_{t-1},\hat{\underline{\theta}}_{BmN})$ 中的抽样误差通常无法在单一横截面中分散掉。确切地说，$\hat{\underline{\varepsilon}}_{\beta BNt}$ 的一些分量在某些模型中易于分散化，例如：若 $\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{\beta})$ 等于 0（即，如果核定价 Q_t 由 $\underline{\omega}'_{xt-1}\underline{x}_t + \underline{\omega}'_{mt-1}\underline{R}_{mt}$ 给定），并且，模型 $B_{xN}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{BxN})$ 和 $B_{mN}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{BmN})$ 都是线性的，则抽样误差 $B_{xN}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{BxN}) - B_{xN}(z_{t-1},\hat{\theta}_{BxN})$ 以及 $B_{mN}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{BmN}) - B_{mN}(\underline{z}_{t-1},\hat{\underline{\theta}}_{BmN})$ 原则上可以通过分散化消除。在本例中，仅可以在单一横截面一致地估计的风险溢价是 λ_{0t}，因

为差异 $\hat{\underline{\lambda}}_{xt}-\underline{\lambda}_{xt}$ 只能在大的时间序列样本中消除[35]

4.4β 定价模型的可行（近似有效）条件 GMM 估计

基于前面所述，现在考虑复合条件 beta 模型(4.21)的有效条件 GMM 估计。在该模型中，$A^0_{\beta Bt-1}$ 的最优选择是 $\Phi^{-1}_{\beta Bt-1}$，其矩阵如下：

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\beta Bt-1} &= -\frac{\partial\lambda_{0t}}{\partial\underline{\theta}}\{\underline{\iota}-Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)-B_x(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bx}) \\
&\times Cov[\underline{x}_t,Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]-B_m(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bm})\underline{\iota}\}' \\
&+E[\underline{R}_{mt}-\underline{\iota}\lambda_{0t}\mid I_{t-1}]'\frac{\partial B_m(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bm})'}{\partial\underline{\theta}}+\lambda_{0t}\{Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]\frac{\partial\underline{\beta}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)'}{\partial\underline{\theta}} \\
&+\frac{\partial Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]}{\partial\underline{\theta}}\beta(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_\beta)'+\frac{\partial Cov[\underline{x}_t,Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]'}{\partial\underline{\theta}} \\
&B_x(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bx})'+Cov[\underline{x}_t,Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}]'\frac{\partial B_x(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}_{Bx})'}{\partial\underline{\theta}}\} \\
\Psi^{-1}_{\beta t-1} &= \Psi^{-1}_{\beta Bt-1}-\Psi^{-1}_{\beta Bt-1}B_{\beta Bt-1}(V_{\beta Bt-1}+B_{\beta Bt-1}\Psi^{-1}_{\beta Bt-1}B'_{t-1})^{-1}\times B'_{\beta Bt-1}\Psi^{-1}_{\beta Bt-1}
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

在原始公式(3.6)—(3.9)中，有效估计要用到 Φ_{t-1}，$Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\underline{R}_t$ 条件期望的导数以及 Ψ_{t-1}，$\underline{R}_tQ(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)-\underline{\iota}$ 的条件协方差矩阵，方程(4.21)反映了计量经济学家可使有效估计便于进行的这类假设。条件 beta 模型放松了对 Φ_{t-1} 的 β 定价形式的评估，而因子模型假定增加了类似 Ψ_{t-1} 的结构。

$A^0_{\beta Bt-1}$ 的一致估计要求对若干条件矩——$\lambda_{0t},E[\underline{R}_{mt}\mid I_{t-1}],Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\mid I_{t-1}],Cov[\underline{x}_t,Q(x_t,\theta_Q)\mid I_{t-1}]$ 以和它们的导数进行赋值，必要时，还包括 $B_{\beta Bt-1},V_{\beta Bt-1}$ 和 $\Psi_{\beta Bt-1}$。目前最通行的策略是仅仅假设有关的条件矩是可得信息的时间不变函数，在本节中从头到尾对条件 beta 模型及条件因子载荷都采用这一策略。对 $A^0_{\beta Bt-1}$ 的赋值，该方法要求计量经济学家针对如下形式的关系：

[35] 这一点在 beta 定价模型的文献中导致许多混乱。文献中有大量的推断，它们源自在特定证券组合下单个资产的收益对 β 的横截面回归。如果这些既定 beta 模型中的 beta 是按有效组合计算的，单个横截面中可以做的，就是（根据总体 beta 及收益的协方差矩阵的*先验*知识）再现有效证券组合的收益。给定总体值 $\Phi_{\beta Bt-1}$，如果既定 beta 模型的残差是可分散的，当资产组合 0 的收益在单个横截面中收敛于无风险利率时，4.1 节中象 p 这种组合的风险溢价信息仅可按时间重现。Shanken(1992)证明，在有常数条件 beta 和以独立同分布特异扰动的模型中，给定抽样误差的合适偏差校正，使用类似 $\Phi_{\beta Bt-1}$ 的样本函数，就是这一种情况。也可参见 Lehmann (1988)及 Lehmann(1990)。

$$
\begin{aligned}
&\lambda_0(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}) = E[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\big|\underline{z}_{t-1}]^{-1} \\
&\underline{\lambda}_m(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}) = E[\underline{R}_{mt}\big|\underline{z}_{t-1}] = -\lambda_0(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta})(\underline{t} - Cov[\underline{R}_{mt},Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\big|\underline{z}_{t-1}]) \\
&\sigma_Q^2(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}) = Var[Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\big|\underline{z}_{t-1}]) \\
&\sigma_{Qx}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}) = Cov[\underline{x}_t,Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\big|\underline{z}_{t-1}] \\
&V_{\beta B}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}) = Var\left[\begin{pmatrix}\underline{x}_t \\ \underline{R}_{mt}\end{pmatrix}\Big|\underline{z}_{t-1}\right] \\
&\Psi_{\beta B}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta}) = Var[\underline{\varepsilon}_{\beta Bt}\big|\underline{z}_{t-1}]
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

它允许使用θ的初始一致估计求 $A^0_{\beta Bt-1}$ 的一致估计。

显然不能预期金融计量学家能可靠地得到这一形式的先验信息。在大多数资产定价应用中，拥有 $\sigma_Q^2(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta})$ 和 $\sigma_{Qx}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta})$ 这样的条件二阶矩信息，在某种程度上要比其条件均值存在相应的条件一阶矩 $\lambda_0(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta})$ 和 $\lambda_m(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta})$ 的假设更合理。然而，对无风险利率的观察排除了对模型 $\lambda_0(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta})$ 的需要， $Cov[\underline{R}_{mt},Q(\underline{x}_t,\underline{\theta}_Q)\,|\,\underline{z}_{t-1}]$ 似乎也不比其他条件二阶矩更需要了。尽管多变量条件协方差模型设定的发展还处于起步阶段，条件协方差矩阵 $V_{\beta B}(\underline{z}_{t-1},\underline{\theta})$ 却没有多大问题。因为不能施加特征值的一般边界条件，4.3 节的讨论中，关于能否得到 $\Psi_{\beta Bt-1}$ 这类合理模型还有些模糊不清。如前所述，如果 $\Psi_{\beta Bt-1}$ 是对角的，方差的设定就相对直接。最后，由于使用(2.13)中的渐进协方差矩阵，保守的推断总是可行的。

方程(4.27)可代表这些条件矩的参数模型，也可是由半参数或非参数方法估计的函数。Robinson(1987),Newwy(1990), Robinson(1991)和 Newwy(1993)讨论了如出现在(4.27)中的自助法（bootstrap)，最近邻居(nearest neighbor)法，以及如（4.27）出现的函数系列估计。所有这些模型都受维数的困扰，以致于它们的改进必须逐个地证实。从这个意义上说，神经网络近似造成的损害比较小，因而可运用。[36]

5．结论

本文表明，如果仅从原则而非实践上讲，资产定价关系的有效半参数估计是很简单明了的。第 2 节描述了最优 GMM 估计量最大相关的性质所带来的效率，该性质类似于资产定价理论中出现的最优保值组合，资产定价关系的半参数特性自然导致了在 beta 定价模型背景下效率增益的探索。

这些模型的结构表明，通过施加条件 beta 模型和/或具有残差的多因子模型以满足横截面中的大数法则，有效估计将更可行。这类模型的不同表现形式存在于有关 beta 定价的文献。因而，独立同分布情况下已被证实是有用的方法，在这更一般的条件下，有着自然的、虽是非线性或也许是非参数的类推，具体细节已经在文章中进行研究。虽然，本文并没有提供效率增益`大小的证据，比起迄今已有的文章，它的确指向更简单明了的解释和应用。

还有下两个方面需要扩展。本文的分析大致是与条件矩的发展同步，它们包括最优条件权重矩阵，以及产生于无套利资产定价模型中的残差的鞅差分性质的精细关系，鞅差分的这种关系不

[36] Barron(1993)和 Hornik 等人(1993)讨论了多维情况下神经网络的绝好的近似性质。

同于在其它应用中经常采用的独立性假设；第二方面包括对更少参数的半参数估计量的检验，在资产定价领域，这相当于核定价和状态价格密度的半参数估计，一个更大胆，且可能更有趣的方向。

参考文献

Bansal, R. and B. N. Lehmann (I995). Bond returns and the prices of state contingent claims. Graduate School of International Relations and Pacific Studies, University of California at San Diego.

Bansal, R. and S. Viswanathan (1993). No arbitrage and arbitrage pricing: A new approach. J. Finance 48, pp. 1231-1262.

Barron, A. R. (1993). Universal approximation bounds for superpositions of a sigmoidal function. IEEE Transactions on Information Theory 39, pp. 930-945.

Black, F., M. C. Jensen and M. Scholes (1972). The capital assest pricing model: Some empirical tests. In: M. C. Jensen, ed., Studies in the Theory of Capital Markets, New York: Praeger.

Breeden, D. T. (1979). An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. Y. Financ. Econom. 7, pp. 265-299.

Cass, D. and J. E. StigUtz (1970). The structure of investor preferences and asset returns and separability in portfolio allocation: A contribution to the pure theory of mutual funds. J. Econom. Theory 2, pp. 122-160.

Chamberlain, G. (1987). Asymptotic efficiency in estimation with conditional moment conditions. J. Econometrics 34, pp. 305-334.

Chamberlain, G. (1992). Efficiency bounds for semiparametric regression. Econometrica 60, pp. 567-596.

Chamberlain, G. and M. Rothschild (1983). Arbitrage and mean-variance analysis on large asset markets. Econometrica 51, pp. 1281-1304.

Cochrane, J. (1991). Production-based asset pricing and the link between stock returns and economic fluctuations. J. Finance 146, pp. 207-234.

Connor, G. and R. A. Korajczyk (1988). Risk and return in an equilibrium APT: Application of a new test methodology. J. Financ. Econom. 21, pp. 255-289.

Constantinides, G. and W. Ferson (1991). Habit persistence and durability in aggregate consumption: Empirical tests. J. Financ. Econom. 29, pp. 199-240.

Douglas, G. W. (1968). Risk in the Equity Markets: An Empirical Appraisal of Market Efficiency. Ann Arbor, Michigan: University Microfilms, Inc.

Epstein, L. G. and S. E. Zin (1991a). Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns: A theoretical framework. Econometrica 57, pp. 937-969.

Epstein, L. G. and S. E Zin (1991b). Substitution, risk averison, and the temporal behavior of consumption and asset returns: An empirical analysis. J. Politic. Econom. 96, pp. 263-286.

Fama, E. F. and J. D. MacBeth (1973). Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. J. Politic. Econom. 81, pp. 607-636.

Grinblatt, M. and S. Titman (1987). The relation between mean-variance efficiency and arbitrage pricing. J. Business 60, pp. 97-112.

Hall, A. (I 993). Some aspects of generalized method of moments estimation. In: G. S. Maddala, C. R. Rao and H. D. Vinod, ed., Handbook of Statistics: Econometrics. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Science Publishers, pp. 393-418.

Hansen, L. P. (1982). Large sample properties of generalized method of moments estimators. Econometrica 50, pp. 1029-1054.

Hansen, L. P. (1985). A method for calculating bounds on the asymptotic covariance matrices of generalized method of moments estimators. J. Econometrics 30, pp. 203-238.

Hansen, L. P., J. Heaton and E. Luttmer (1995). Econometric evaluation of asaest pricing models. Rev. Financ. Stud. 8 pp. 237-274.

Hansen, L. P., J. Heaton and M. Ogaki (1988). Efficiency bounds implied by multi-period conditional moment conditions. J. Amer. Stat. Assoc. 83, pp. 863-871.

Hansen L. P. and R. J. Hodrick (1980). Forward exchange rates as optimal predictors of future spot rates: An econometric analysis. J. Politic. Econom. 88, pp, 829--853.

Hansen, L. P. and R. Jagannathan (1991). Implications of security market data for models of dynamic Economies. J. Politic. Econom. 99, pp. 225-262

Hansen, L. P. and R. Jagannathan (1994). Assessing specification errors in stochastic discount factor models. Research Department, Federal Reserve Bank of Minneapolis Staff Report 167.

Hansen, L. P. and S. F. Richard (1987). The role of conditioning information in deducing testable restrictions implied by dynamic asset pricing models. Econometrica 55, pp. 587-613.

Hansen, L. P. and K. J. Singleton (1982). Generalized instrumental variables estimation of nonlinear rational expectations models. Econometrica 50, pp. 1269-1286.

Harrison, M. J. and D. Kreps (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. J. Econom. Theory 20, pp. 381-408.

He, H. and D. Modest (1995). Market frictions and consumption-based asset pricing. J. Politic. Econom. 183, pp. 94-117.

Hornik, K., M. Stinchcombe, H. white and P. Auer (1993). Degree of approximation results for feedforward networks approximating unknown mappings and their derivatives. Neural Computation 6, pp. 1262-1275.

Huberman, G. and S. Kandel (1987). Mean-variance spanning. J. Finance 42, pp. 873-888.

Huberman, g., S. Kandel and R. F. Stambaugh (1987). Mimcking portfolios and exact asset pricing. J. Finance 42, pp. 1-9.

Ledoit, O. (1994). Portfolio selection: Improved covariance matrix estimation. Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology,

Lehmann, B. N. (1987). Orthogonal portfolios and alternative mean-variance efficiency tests. J. Finance 42, pp. 601-619.

Lehamann, B. N. (1988). Mean-variance efficiency tests in large cross-sections. Graduate School of International Relations and Pacific Studies, University of California at San Diego.

Lehmann, B. N. (1990). Residual risk revisited. J. Econometrics 45, pp. 71-97.

Lehmann, B. N. (1992) Notes of dynamic factor pricing models. Rev. Quant. Finance Account. 2, pp. 69-87.

Lehmann, B. N. and David M. Modest (1988), The empirical foundations of the arbitrage pricing theory. J. Financ. Econom. 21, pp. 213-254.

Lintner, J. (1965). Security prices and risk: The theory and a comparative analysis of A.T&T. and leading industrials. Graduate School of Business, Harvard University.

Luttmer, E. (1993). Asset pricing in economies with frictions. Department of Finance, Northwestern University.

Merton, R. C. (1972). An analytical derivation of the efficient portfolio frontier. J. Financ. Quant.

Anal. 7, pp. 1851-1872.

Merton, R. C. (1973). An intertemporal capital asset pricing model. Econometrica 41, pp. 867-887.

Miller, M. H. and M. Scholes (1972). Rates of return in relation to risk: A reexamination of some recent findings. In: M. C. Jesen, ed., Studies in the Theory of Capital Markets, New York: Praeger, pp. 79-121.

Newey, W. K. (1990). Efficient instrumental variables estimation of nonlinear models. Econometrica 58, pp. 809-837.

Newey, W. K. (1993). Efficient estimation of models with conditional moment restrictions. In: G. S. Maddala, C. R. Rao and H. D. Vinod, eds., Handbook of Statistics: Econometrics. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Science Publishers.

Newey, W. K. and K. D. West (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. Econometrica 55, pp. 703-708.

Ogake, M. (1993). Generalized method of moments: Econometric applications. In: G. S. Maddala, C. R. Rao and H. D. Vinod, eds, Handbook of statistics: Econometric, Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Science Publishers, pp. 875-891.

Robinson, P. M. (1987). Asymptotically efficient estimation in the presence of heteroskedasticity of unknown form. Econometrica 59, pp. 875-891.

Robinson, P. M. (1991). Best nonlinear three-stage least squares estimation of certain econometric models. Econometrica 59, pp. 755-786.

Roll, R. W. (1977). A critique of the asset Pricing Theory's Tests-Part I: On past and potential testability of the theory. J. Financ. Econom. 4, pp. 120-176.

Rosenberg, B. (1974). Extra-market components of covariance in security returns. J. Financ. Quant. Anal. 9, pp. 262-274.

Rosenberg, B. and V. Marathe (1979). Tests of capital asset pricing hypotheses. Research in Finance: A Research Annual 1, pp. 115-223.

Ross, S. A. (1976). The arbitrage theory of capital asseat pricing. J. Economic Theory 13, pp. 341-360.

Ross, S. A. (1977). Risk, return, and arbitrage. In: I. Friend and J.L. Bicksler, eds., Risk and Return in Finance. Cambridge, Maas.: Ballinger.

Ross, S. A. (1978a). Mutual fund separation and financial theory - the separating distributions. J. Econom. Theory 17, pp. 254-286.

Ross, S. A. (1978b). A simple approach to the valuation of risky streams. J. Business 51, pp. 1-40

Rubinstein, M. (1976). The valuation of uncertain income streams and the pricing of options. Bell J. Econom. Mgmt. Sci. 7, pp. 407-425.

Shanken, J. (1992). On the estimation of beta pricing models. Rev. Financ. Stud. 5, pp. 1-33.

Summers, L. H. (1985). On economics and finance. J. Finance 40, pp. 633-636.

Summers, L. H. (1986). Does the stock market rationally reflect fundamental values? J. Finance 41, pp. 591-600.

Tauchen, G. (1986). Statistical properties of generalized method of moments estimators of structural parameters obtained from financial market data. J. Business Econom. Statist. 4, pp. 397-425.