# 第 1 章　资产定价模型的计量经济评估*

Wayne E.Ferson 和 Ravi Jagannathan

本文简要回顾了基于广义矩方法（GMM）的资本资产定价模型评估技术。文中首先推导了 CAPM 和多 beta 模型，并讨论了最初用于评估这些模型的古典两阶段回归方法。然后描述了一般资产定价模型的核定价表示法，这种表示法自然地促进 GMM 在评估大多数资产定价模型的条件和无条件形式中的运用。最后，本文还讨论了其他观点的诊断方法。

## 1.　引言

金融研究的重要领域之一就是致力于理解为什么我们观察到的各种金融资产有着不同的期望收益率。例如，从 1926 年 1 月到 1991 年底，美国股票市场的总体年平均收益率为 11.94%。相比之下，美国国库券的收益率只有 3.64%。同期的通货膨胀率为 3.11%(参见 Ibbotson Associates（1992）).

为了正确评估这些巨大的差异，我们不妨看看，一顿供两人吃的正餐，1926 年在纽约大约要花 10 美元。如果同样的 10 美元被投资到国库券上，到 1991 年底将增值到 110 美元，仍然够两个人吃一顿不错的正餐。但如果把 10 美元投资到股票市场，则到 1991 年底将增长到 6756 美元。 这里的关键在于不同金融资产之间的平均收益的差异是巨大的，并且从经济学的角度来看，这种差异也是非常重要的。

人们提出各种资产定价模型用于解释这一现象。资产定价模型描述了证券市场上具有未来收益的资产价格是如何决定的。或者，可以将资产定价模型视为金融资产，如股票、债券、期货、期权和其他证券的期望收益率的描述。各种资产定价模型之间的差异源于投资者的偏好、才能、生产和信息集的假定不同，对金融市场中控制消息到达的随机过程以及对真实资产和金融资产市场中允许的摩擦类型的约束不同。

虽然各种资产定价模型之间有许多差异，但也有重要的相同之处。所有的资产定价模型都是以下面的三个中心概念中的一个或几个为基础的。首先是一价定律。根据这一定律，任何支付同样收益的未来资产价格必须相等。一价定律引申出第二个概念——无套利原则。无套利原则认为市场力量有助于调整金融资产的价格以消除套利机会。当资产通过买和卖可以结合起来，形成净成本为零的投资组合时，就产生了套利的机会。此时不存在产生损失的可能，而盈利的概率为正。通过金融市场的交易，套利机会将趋于消失。因为当投资者试图逐利时，价格也会调整。例如，当证券 A 的价格太低而产生了套利机会时，投资者将竞相购买证券 A 会促使证券 A 的价格上升。当有可能买或卖两个相同的未来收益权时，一价定律就遵循无套利原则。因为，如果两个未来收益权的价格不同且交易成本小于两个价格之间的差异，则会产生套利机会。套利定价理论（APT，Ross （1976））是最有名的以套利原则为基础的资产定价模型之一。

资产定价模型中的第三个中心概念是金融市场均衡。投资者希望持有的金融资产源于最优化问题。在一个无摩擦市场中，金融市场均衡的必要条件是投资者最优化问题的一阶条件得到满足。这就要求投资者在边际上不在乎他们所持有资产的微小变化。均衡资产定价模型符合投资者组合选择问题的一阶条件和市场出清条件。市场出清条件认为投资者期望持有的

* Ferson 感谢华盛顿大学 Pigott-PACCAR 教学基金的资助。Jagannathan 感谢国家科学基金（批准号 SBR-9409824）的资助。本文所表达的观点仅代表作者本人，与明尼阿波利斯联邦储备银行或联邦储备体系无关。

总资产必须等于证券供给的总“市场组合”。

最早的均衡资产定价模型是 20 世纪 60 年代早期发展起来的 Sharp-Lintner-Mossin-Black 资本资产定价模型（CAPM）。CAPM 认为资产的期望收益是资产 beta 值的线性函数，其中 beta 是资产的期望收益对市场投资组合收益回归的系数。Merton（1973）扩展了 CAPM，把它从一个单时期模型扩展到投资者能跨期分别进行消费、储蓄和投资决策的经济环境。从经济计量学的意义上来说，Merton 的模型使 CAPM 从一个单 beta 模型一般化为*多 beta 模型*。多 beta 模型认为资产的期望收益是若干个 beta 的线性函数。Ross 的 APT 是多 beta 资产定价模型的另一个例子，尽管 APT 中的期望收益只是相关 beta 的一个近似的线性函数。

本文侧重于（但非排他地）使用广义矩方法（GMM，hansen 1982）对资产定价模型进行经济计量评估。之所以强调 GMM，是因为我们认为，GMM 是过去十五年里金融实证方法的最重要的创新。在一般的统计假设下，该方法简单、灵活、有效，并且在金融应用中具有影响力。GMM“广义性”的一个原因在于金融和其他领域中应用的许多实证方法都可视为 GMM 的特例。

本文其余部分的结构如下。第 2 节推导了 CAPM 和多 beta 模型，并且讨论了最初用于评估这些模型的古典两阶段回归过程。这一部分内容还介绍了运用模型进行实证研究所涉及的各种统计问题；它引发了对多变量估计方法的需求。第 3 节讨论了另一种使 GMM 的应用更为方便的资产定价模型的表达形式，并指出大多数的资产定价模型都能表示成这一*随机贴现因子*(stochastic discount factor)的形式。第 4 节描述了 GMM 的步骤，以及如何用它来估计和检验各种条件和无条件形式的资产定价模型。第 5 节讨论了模型诊断。这些诊断为统计拒绝的原因提供了进一步的解释，而且有助于评估模型中的设定误差。为了避免增加符号，我们有时在不同的小节中用同样的符号来表示不同的内容，但通过上下文可以明确其含义。第 6 节是小结。

## 2．检验 beta 定价模型的横截面回归方法

本节首先推导出 CAPM，扩展其实证设定以包括多 beta 模型。然后阐述首先由 Black，Jensen 和 Scholes (1972， 此处缩写为 BJS) 使用的、直观上吸引人的横截面回归方法，并讨论该方法的缺点。

### *2.1 资本资产定价模型*

CAPM 是第一个均衡资产定价模型，它仍是金融经济学的基础之一。该模型是由 Sharpe(1964)、Lintner(1965)、Mossin(1966)以及 Black(1972)发展的。有大量的理论文章改善了必要的假设并提供了 CAPM 的推导。此处我们对这一理论作一简要回顾。

令 $R_{it}$ 表示 1 加上资产 $i$ 在 $t$ 时期里的收益，$i = 1,2,\ldots,N$ 。令 $R_{mt}$ 表示经济中所有资产的市场组合相应的总收益。理论中预想的市场组合的收益是不可观测的。因此，CAPM 的实证研究通常假设市场收益是可观测的普通股票组合收益的精确线性函数。[1] 因此，根据 CAPM，有

$$E(R_{it}) = \delta_0 + \delta_1 \beta_i \tag{2.1}$$

[1] 当这一假设不满足时，会导致市场替代误差。Roll(1977)、Stambaugh(1982)、Kandel(1984)、Kandel & Stambaugh (1987)、Shanken(1987)、Hansen & Jagannathan(1994) 和 Jagannathan & Wang(1996) 等对这一误差的来源进行了研究。在我们的讨论中将忽略替代误差。

其中，

$$\beta_i = Cov(R_{it}, R_{mt}) / Var(R_{mt})$$

根据 CAPM，收益率为 $R_{mt}$ 的市场组合在收益的*最小方差边界*上。当一个收益在最小方差边界上时，不存在其他的具有相同收益但更小方差的组合。如果投资者是风险厌恶者，CAPM 意味着 $R_{mt}$ 是在最小化方差边界的正斜率部分，即系数 $\delta_1 > 0$。在方程(2.1)中 $\delta_0 = E(R_{0t})$。因为条件 $Cov(R_{0t}, R_{mt}) = 0$，收益 $R_{0t}$ 被称为对 $R_{mt}$ 的*零-beta 资产*。

为了导出 CAPM，假设投资者在每个 $t-1$ 时期选择持有的资产以最大化下一期的目标函数：

$$V[E(R_{pt}|I), Var(R_{pt}|I)] \tag{2.2}$$

其中 $R_{pt}$ 表示在时期 $t$ 最优选择组合的收益，$E(\cdot|I)$ 和 $Var(\cdot|I)$ 表示 $t-1$ 时期投资者拥有信息集 $I$ 的条件下收益的期望和方差。我们假设函数 V[.,.] 随它的第一个自变量递增且是凹的，随它的第二个自变量递减，且该函数不随时间变动。现在，我们假设信息集 $I$ 只包括资产收益的无条件矩，并省略符号 $I$ 以简化表示法。上面给出的最优化问题的一阶条件经处理后可以得出，对于每个资产 $i = 1,2,\ldots,N$，都有：

$$E(R_{it}) = E(R_{0t}) + \beta_{ip} E(R_{pt} - R_{0t}) \tag{2.3}$$

其中，$R_{pt}$ 是最优选择组合的收益，$R_{0t}$ 是与 $R_{pt}$ 不相关的资产的收益，且 $\beta_{ip} = Cov(R_{it}, R_{pt}) / Var(R_{pt})$。

正如方程(2.3)所示， 为了从投资者最优化问题的一阶条件得到 CAPM，理解最小方差边界——给定期望收益，具有最小方差的组合收益的集合——的某些性质是有用的。易于证明，投资者的最优选择组合在最小方差边界上。

最小方差边界的性质之一，是对组合的形成封闭。也就是说，边界上的组合的组合仍然在边界上。假设所有的投资者有相同的看法，则每个投资者的最优选择组合将会在同样的边界上，因此经济中所有资产的市场组合——每个投资者的最优化选择组合——也将会在边界上。能够证明，如果 $R_{pt}$ 被边界上任意一个组合收益替代，同时 $R_{0t}$ 也被它相应的*零-beta* 收益替代，方程(2.3) 仍将成立（Roll (1997)）。因此，如方程(2.1)所示，我们可以通过用市场组合的收益替代方程(2.3)中的投资者最优组合的收益而得到 CAPM。

## *2．2　CAPM 可检验的含义*

对于给定的资产集合，如果它们的期望收益和市场组合的 $\beta_i$ 是已知的，一个很自然的检验 CAPM 的方法就是估计期望收益和 beta 之间的经验关系，并判断这一关系是否为线性。

然而，对于计量经济学家而言，beta 和期望收益都是不可观测的，二者都必须由估计给出。金融文献首先用两阶段时间序列与横截面的方法解决这一问题。

考虑以下与(2.1)给出的总体关系式相对应的样本形式：

$$R_i = \delta_0 + \delta_1 b_i + e_i \text{,} \quad i = 1, \ldots, N \tag{2.4}$$

这是 $R_i$ 关于 $b_i$ 的横截面回归，回归系数为 $\delta_0$ 和 $\delta_1$。在方程(2.4)中，$R_i$ 表示资产 $i$ 的样本平均收益， $b_i$ 是一段时间内收益 $R_{it}$ 对市场指数收益 $R_{mt}$ 的（OLS）回归斜率系数，它是一个常数。令 $u_i = R_i - E(R_{it})$，$v_i = \beta_i - b$，并替代(2.1)式中的 $E(R_{it})$ 和 $\beta_i$，就可得到(2.4)，并且设定复合误差 $e_i = u_i + \delta_1 v_i$。这一替代会产生古典的变量误差（errors-in-variables）问题，因为在横截面回归模型(2.4)中 $b_i$ 的回归元存在测量误差。用时间序列小样本估计 $b_i$，回归方程(2.4)就会产生 $\delta_0$ 和 $\delta_1$ 的不一致估计，即便是在横截面大样本中也是如此。然而，当时间序列样本容量 $T$（用于第一步估计 beta 系数 $\beta_i$）变得非常大时，横截面回归可以得到系数的一致估计。这是因为当 T 变得非常大时，$\beta_i$ 的第一步估计就是一致的，第二阶段回归的变量误差问题就会消失。

单个证券的 beta 测量误差可能很大，但组合的 beta 的误差就要小得多。据此，早期的研究集中在创建证券组合上，以使得组合的 beta 可以精确估计。因此解决变量误差问题的一个方法就是用组合来代替单个证券。但这会产生另一个问题。随机选择组合的 beta 显示出很小的分散性。如果计量经济学家可获得的所有组合都有相同的 beta，那么方程(2.1)的横截面关系式就没有实证的内容了。Black, Jensen 和 Scholes(BJS，1972)提出一个创新的方法克服了这一困难。在每个时间点上都进行横截面回归，可以估计出单个证券的以历史为基础的 beta，再根据 beta 的估计值对证券进行分类并将单个证券分配到 beta 组中。这样处理后的组合，beta 就有很大的分散性。在实证金融文献中，类似的组合形成技术已成为标准的实践方法。

假设我们能用这样的方法创建组合，将变量误差问题看成为次要问题。我们仍然需要决定如何评估是否存在 CAPM 的实证支持。文献中的一个标准方法是考虑设定有关变量的备择假设，该变量是确定的资产期望收益。根据 CAPM，任何资产的期望收益都仅是其 beta 的线性函数。因此，一个很自然的检验就是验证任何其他的横截面变量是否能够解释方程(2.1)中的偏差。这就是 Fama 和 MacBech(1973)提出的策略，即把 beta 的平方以及非市场（或残差的时间序列）方差作为附加变量加入到横截面回归模型中。更近期的实证研究用到了公司的相对规模，它由其股权的市场价值、股权的帐面价值与市场价值之比以及其他相关的变量来表示。[2] 例如，可以设定以下的模型：

$$E(R_{it}) = \delta_0 + \delta_1 \beta_i + \delta_{size} LME_i \tag{2.5}$$

[2] Fama 和 French(1992)给出了这一方法新近的突出例子。Berk(1995)对使用相对市场价值以及帐面价值与价格的比率作为期望收益的度量提供了证明。

这里的 $LME_i$ 是公司 $i$ 股权资本总市值的自然对数。接下来我们将说明这些思路很容易扩展到一般的多 beta 模型。然后再介绍横截面回归估计量的抽样理论。

*2.3 多 beta 定价模型和横截面回归方法*

根据 CAPM，资产的期望收益是其市场 beta 的线性函数。多 beta 模型则认为期望收益是几个 beta 的线性函数，即：

$$E(R_{it}) = \delta_0 + \sum_{k=1,\ldots,K} \delta_k \beta_{ik} \tag{2.6}$$

其中，$\beta_{ik}$（$k = 1,\ldots,K$）是资产 $i$ 的收益对 K 个经济中普遍存在的风险因子 $f_k$（$k = 1,\ldots,K$）进行多元回归得到的系数。系数 $\delta_0$ 是 $\beta_{0k} = 0$（$k = 1,\ldots,K$）时资产的期望收益，即它是零-（多-）beta 资产的期望收益。与第 $k$ 个因子相对应的系数 $\delta_k$ 的解释如下：对于具有 $\beta_{ik} = 1$ 和 $\beta_{ij} = 0$（对所有的 $\mathrm{j} \neq \mathrm{k}$）的组合，它是一个期望收益的差额或溢价(premium)，即超过零-beta 资产的期望收益部分。换句话说，它是风险因子 k 每单位 beta 的期望收益溢价。Ross (1976)指出，式(2.6)的一个近似形式在无套利经济中也能成立。Connor(1984)提供了式(2.6)在一个拥有无限数量资产的一般均衡经济中精确成立的充分条件。这一形式的多 beta 模型，确切地说是 APT，在金融文献中引起了广泛的关注。当因子 $f_k$ 能被计量经济学家观测到时，横截面回归方法可用于实证评估多 beta 模型。[3] 例如，给定因子的 beta，备择假设——公司的规模与期望收益相关——可以通过收益对 K 个因子的 beta 及 $LME_i$ 的横截面回归来检验，这类似于方程(2.5)，并检验系数 $\delta_{size}$ 是否显著不等于零。

*2.4 系数估计量的抽样分布：两阶段横截面回归方法*

在这一节中我们沿用 Shanken(1992)以及 Jagannathan 和 Wang(1993，1996)的方法，导出用横截面回归方法估计的系数的渐进分布。从发展抽样理论的目的出发，我们将使用方程(2.6)的如下推广：

$$E(R_{it}) = \sum_{k=0}^{K_1} \gamma_{1k} A_{ik} + \sum_{k=1}^{K_2} \gamma_{2k} \beta_{ik} \tag{2.7}$$

其中，$\{A_{ik}\}$ 是公司 $i$ 的可观测特性，并假定它能够被无误差地测量（当 $k = 0$ 时的第一个“特征”是常数 1.0）。其中的一个属性可以是规模变量 $LME_i$。$\beta_i$ 是对经济中的 $K_2$ 个风险因子集合回归的 beta，它可以包括市场指数收益。用矩阵符号能够使方程(2.7)写得更加简洁：

$$\mu = X\gamma \tag{2.8}$$

---

[3] 在一些附加的辅助假设下，当因子的实现是不可观测时，可参见 Chen(1983)、Connor 和 Korajczyk(1986)、Lehmann 和 Modest(1987)、Mcelroy 和 Burmeister(1988)对估计和检验模型的讨论。

其中，$\mu = E(R_t)$，$R_t = [R_{1t}, ...R_{Nt}]$,，$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{A} : \beta]$，矩阵$A$和$\beta$及向量$\gamma$沿用(2.7)中的定义。

横截面方法在两阶段中进行。首先，$\beta$由$R_{it}$对风险因子和常数项的时间序列回归估计得到。将估计量表示为$b$。令$x = [A : b]$，$R$表示收益向量$R_t$的时间序列均值。并且令$g$表示由如下横截面回归得到的系数向量的估计值：

$$g = (x'x)^{-1} x'R \tag{2.9}$$

这里假定$x$的秩为$1 + K_1 + K_2$。如果$b$和$R$依概率各自收敛于$\beta$和$E(R_t)$，那么$g$将依概率收敛于$\gamma$。

Black、Jensen 和 Scholes(1972)建议联系以下的估计量$g$来估计抽样误差。在每个时期$t$，用 $R_t$对$x$回归以获得$g_t$，其中

$$g_t = (x'x)^{-1} x'R_t \tag{2.10}$$

$T^{1/2}(g - \gamma)$的协方差矩阵的 BJS 估计为：

$$v = T^{-1} \sum_t (g_t - g)(g_t - g)' \tag{2.11}$$

这里用到了$g$是$g_t$的样本均值这一事实。将(2.10)给出的$g_t$的表达式代入(2.11)中，得到$v$的表达式：

$$v = (x'x)^{-1} x'[T^{-1} \sum_t (R_t - R)(R_t - R)']x(x'x)^{-1} \tag{2.12}$$

为了分析 BJS 的协方差矩阵估计量，把平均收益向量$R$写为：

$$R = xy + (R - \mu) - (x - X)\gamma \tag{2.13}$$

将$R$的这个表达式代入$g$的表达式(2.9)，得到：

$$g - \gamma = (x'x)^{-1} x'[(R - \mu) - (b - \beta)\gamma_2] \tag{2.14}$$

假设$b$是$\beta$的一致估计量，并且$T^{1/2}(R - \mu) \to_d u$，$T^{1/2}(b - \beta) \to_d h$，其中$u$和$h$是具有精确分布的随机变量，而$\to_d$表示依分布收敛。于是有

$$T^{1/2}(g - \gamma) \to_d (x'x)^{-1} x'u - (x'x)^{-1} x'h\gamma_2 \tag{2.15}$$

在(2.15)中，右边的第一项是样本均值$R$替代$\mu$而产生的抽样误差分量。第二项是$\beta$由其估计$b$替代而产生的抽样误差分量。

$u$ 渐进方差通常的一致估计为：

$$T^{-1}\sum_t (R_t - R)(R_t - R)' \tag{2.16}$$

因此，(2.15)中第一项的方差的一致估计为：

$$(x'x)^{-1}x'[T^{-1}\sum_t (R_t - R)(R_t - R)']x(x'x)^{-1}$$

它与式(2.12)中给出的系数估计 $v$ 的协方差矩阵的 BJS 估计量相同。因此，如果忽略由于使用估计的 beta 而产生的抽样误差，那么 BJS 协方差估计量就提供了估计量 $g$ 的方差的一致估计。然而，如果与 beta 相关联的抽样误差不是很小的话，则 BJS 协方差估计量将会有偏差。虽然偏差的程度一般是不可能确定的，但 Shanken(1992)提出了一个在附加假设下评估偏差的方法。[4]

考虑以下资产 $i$ 的收益对常数项和第 $k$ 个经济因子的单变量时间序列回归：

$$R_{it} = \alpha_{ik} + \beta_{ik} f_{kt} + \varepsilon_{ikt} \tag{2.17}$$

我们提出(2.17)中误差项的如下附加假设：(1)以经济因子 $f_k$ 的时间序列为条件，误差 $\sum_{ikt}$ 的均值为零；(2)给定因子，$\varepsilon_{ikt}$ 和 $\varepsilon_{jlt}$ 的条件协方差是一个固定常数 $\sigma_{ijkl}$。用 $\sum_{kl}$ 表示矩阵 $\{\sigma_{ijkl}\}_{ij}$。最后假设：(3)因子的样本协方差矩阵存在并且依概率收敛于元素为 $\Omega_{kl}$ 的常数正定矩阵 $\Omega$。

**定理 2.1.** (Shanken，1992、Jagannathan 和 Wang，1996)

$T^{1/2}(g-\gamma)$ 依分布收敛于一个具有零均值、协方差矩阵为 $V+W$ 的正态分布随机变量，其中，$V$ 是(2.12)中给出的矩阵 $v$ 的概率极限，且

$$W = \sum_{l,k=1,\ldots,K_2} (x'x)^{-1}x'\{\gamma_{2k}\gamma_{2l}(\Omega_{kk}^{-1}\prod_{kl}\Omega_{ll}^{-1})\}x(x'x)^{-1} \tag{2.18}$$

其中 $\prod_{kl}$ 的定义在附录中给出。

证明：见附录。

定理 2.1 表明，为了得到 BJS 二阶段估计量 $g$ 的协方差矩阵的一致估计，首先用 BJS 方法估计 $v$（$V$ 的一致估计）。然后通过样本的相应形式估计 $W$。

虽然横截面回归方法直观上很吸引人，但上述讨论表明，为了评估与参数估计量相关联的抽样误差，需要给出相当严格的假设。此外，计量经济学家必须构建一个特定的备择假设，从而可以拒绝模型。下面第 4 节中介绍的一般方法具有较弱的统计假设并且有能力处理非设定和设定的备择假设，这也是该方法的优点之一。

## 3. 资产定价模型和随机贴现因子

[4] Shanken(1992)使用的是多元回归计算的 beta。为了简便起见，接下来的推导使用单变量回归出来计算的 beta。这两个 beta 集由可逆的线性变换连接起来。此外，不失一般性，因子可以是正交的。

所有的金融资产定价模型实际上都隐含着，任何总资产收益$R_{i,t+1}$与某些市场随机变量$m_{t+1}$相乘后，具有常数条件期望：

$$E_t\{m_{t+1}R_{i,t+1}\}=1\text{，所有的 } i \tag{3.1}$$

给定一个市场范围的信息集，符号$E_t\{\cdot\}$用于表示条件期望，有时称作市场信息子集$Z_t$条件下的期望则更方便些，记作$E\{\cdot|Z_t\}$。例如，$Z_t$能够表示计量经济学家可获得的公共信息集的工具变量向量。当$Z_t$是一个空信息集时，无条件期望记作$E_t\{\cdot\}$。如果对方程(3.1)取期望值，结果是期望值$E\{\cdot|Z_t\}$和$E_t\{\cdot\}$具有相同形式的方程。

随机变量$m_{t+1}$在文献中有各种不同的名字。它常常被称为随机贴现因子、等价于鞅的测度（equivalent to martingale measure），Radon-Nicodym 微商，或者是跨时期边际替代率。我们将满足方程(3.1)的$m_{t+1}$称为有效*随机贴现因子*。使用这一术语的动机源于以下的观察。方程(3.1)可写作

$$P_{it}=E_t\{m_{t+1}X_{i,t+1}\}$$

其中$X_{i,t+1}$是资产$i$在$t+1$时期的收益(市场价值加上任何现金支付)，且 $R_{i,t+1}=X_{i,t+1}/P_{it}$。方程(3.1)说明如果用随机贴现因子$m_{t+1}$乘以一个未来收益$X_{i,t+1}$并且取期望值，就得到了未来收益的现值。

满足(3.1)的$m_{t+1}$的存在说明所有具有相同收益的资产具有相同的价格（即*一价定律*）。在$m_{t+1}$是一个严格正随机变量的约束下，方程(3.1)等价于*无套利*条件。条件是其所有收益*为正*（永不能为负，且以正的概率为正）的资产组合必须有一个正价格。

无套利条件并不唯一地确定$m_{t+1}$，除非市场是完全的。这意味着可以在证券市场上获得与时期$t+1$的自然状态一样多的线性独立的收益。为了对随机贴现因子和无套利条件进行进一步的深入考察，我们现时假定市场是完全的。给定完全的市场，要求要有正的状态价格以排除套利机会。[5] 当且仅当$t+1$时的自然状态是$s$时，令$q_{ts}$表示在$t+1$时期将支付的一单位货币有价证券在时期$t$的价格。那么约定在$t+1$时期支付$\{X_{i,s,t+1}\}$的有价证券在时期$t$的价格是自然状态$s$的函数：

[5] 参见 Debreu(1959)和 Arrow(1970)的完全市场模型。参见 Beja(1971)、Rubinstein(1976)、Ross(1977)、Harrison 和 Kreps(1979)、Hansen 和 Richard(1987)的进一步理论讨论。

$$\sum_s q_{ts} X_{i,s,t+1} = \sum_s \pi_{ts} (q_{ts} / \pi_{ts}) X_{i,s,t+1}$$

其中$\pi_{ts}$是时期$t$评估的状态$s$将在时期$t+1$发生的概率。将这一表达式与方程(3.1)作比较可以看出，在完全市场的假设下，$m_{s,t+1} = q_{ts} / \pi_{ts}$是随机贴现因子在状态$s$时的值。由于这些概率是正的，所以由$\{m_{s,t+1}\}$定义的随机变量是严格为正的条件等价于所有的状态价格为正的条件。

方程(3.1)有利于展开资产定价模型的经济计量检验。令$R_{t+1}$表示计量经济学家已经观测到的$N$个资产的总收益向量。那么(3.1)可以写成

$$E_t\{m_{t+1} R_{i,t+1}\} - \underline{1} = \underline{0} \tag{3.2}$$

其中$\underline{1}$表示$N$维 1 向量*，$\underline{0}$表示$N$维零向量。式(3.2)给出的$N$个方程的集合构成了用广义矩方法进行检验的基础。模型中隐含的$m_{t+1}$的特定形式给出了方程的实证内容。

*3.1 CAPM 的随机贴现因子表示法和多 beta 资产定价模型*

考虑如方程(2.1)给出的 CAPM：

$$E(R_{it+1}) = \delta_0 + \delta_1 \beta_i$$

其中，

$$\beta_i = Cov(R_{it+1}, R_{mt+1}) / Var(R_{mt+1})$$

当随机贴现因子有特别的设定时，CAPM 也能表示成方程(3.1)的形式。为了说明这点，把方程(3.1)中的期望积扩展为期望积加上协方差并重新整理，可得：

$$E(R_{it+1}) = 1/E(m_{t+1}) + Cov(R_{it+1}; -m_{t+1}/E(m_{t+1})) \tag{3.3}$$

将方程(2.1)和(3.3)中的项对等，可看出方程(2.1)的 CAPM 等价于方程(3.1)的形式，其中，

$$E\{R_{it+1} m_{t+1}\} = 1$$

这里，

$$m_{t+1} = c_0 - c_1 R_{mt+1}$$

$$c_0 = [1 + E(R_{mt+1}) \delta_1 / Var(R_{mt+1})] / \delta_0 \tag{3.4}$$

且

* 原文为单位向量（unit vector）有误，单位向量是指长度为 1 的向量，如各元素均为$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$的$n$维向量。这里应是“1 向量”，表示各元素均为 1 的向量。——译者注。

$$c_1 = \delta_1 / [\delta_0 Var(R_{mt+1})]$$

方程(3.4)最早是由 Dybvig 和 Ingersoll(1982)推导出来的。

现在考虑方程(2.6)给出如下的多 beta 模型：

$$E(R_{it+1}) = \delta_0 + \sum_{k=1,\ldots,K} \delta_k \beta_{ik}$$

通过替代可以很容易地证实这一模型包含有如下随机贴现因子表达式：

$$E\{R_{it+1} m_{it+1}\} = 1$$

其中，

$$m_{it+1} = c_0 + c_1 f_{1t+1} + \ldots + c_K f_{Kt+1}$$

且

$$c_0 = [1 + \sum_K \{\delta_k E(f_k) / Var(f_k)\}] / \delta_0 \qquad (3.5)$$

$$\mathrm{c_j} = -\{\delta_j / \delta_0 \mathrm{Var}(\mathrm{f_j})\}, \quad j = 1, \ldots, K$$

前述结果适用于 CAPM 和多 beta 模型，被解释为有关资产无条件期望收益的表述。这些模型还可看作某些检验中有关条件期望收益的表述，这些检验中的期望值是以预先确定的、公众可获得的信息为条件的。适当变换符号，本节中的所有分析都适用于条件期望值。在此情况下，参数$c_0$、$c_1$、$\delta_0$、$\delta_1$等将成为时期$t$信息集合的函数。

*3.2　随机贴现因子的其他例子*

在均衡资产定价模型中，方程(3.1)作为消费者－投资者最优化问题的一阶条件出现。代理人最大化终生的消费效用函数（可能包括给继承人的遗产）。以$V(\cdot)$表示这一函数。如果资源在消费和投资中的分配是最优的，那么通过改变分配是不可能得到更高的效用的。设想一个投资者考虑减少$t$ 时期的消费以用于购买更多的（任何）资产。$t$时期放弃消费的效用成本是消费支出$C_t$的边际效用（表示为$\partial V / \partial C_t) > 0$乘上与消费支出具有相同度量单位的资产价格$P_{i,t}$。在$t+1$时期卖掉股票并消费出售收入的期望效用增益（gain）是：

$$E_t\{(P_{i,t+1} + D_{i,t+1})(\partial V / \partial C_{t+1})\}$$

其中，$D_{i,t+1}$是$t+1$时期支付的现金流或者股利。如果分配使期望效用最大化，那么下列条件必须满足：

$$P_{i,t} E_t\{(\partial V / \partial C_t)\} = E_t\{(P_{i,t+1} + D_{i,t+1})(\partial V / \partial C_{t+1})\}$$

这个跨时期欧拉方程等价于方程(3.1)，且

$$m_{t+1} = (\partial V / \partial C_{t+1}) / E_t\{(\partial V / \partial C_t)\} \qquad (3.6)$$

方程(3.6)中的$m_{t+1}$是代表性消费者的*跨时期边际替代率*(IMRS)。本节的其余部分显示，资

产定价文献中有多少模型是(3.1)的特殊形式，其中 $m_{t+1}$ 由方程(3.6)定义。[6]

如果一个代表性消费者的终生效用函数 $V(\cdot)$ 是时间上可分的，那么在 $t$ 时期消费的边际效用（$\partial V/\partial C_t$）就仅依赖于 $t$ 时期的变量。假定偏好是时间上可分且可加的，Lucas(1978)和 Breeden(1979)推导了以下形式的以消费为基础的资产定价模型：

$$V = \sum_t \beta^t u(C_t)$$

其中 $\beta$ 是时间贴现参数，且 $u(\cdot)$ 是随当前消费 $C_t$ 递增的凹函数。对 $u(\cdot)$ 的一个简便设定是：

$$u(C) = [C^{1-\alpha} - 1]/(1-\alpha) \tag{3.7}$$

在方程(3.7)中，$\alpha > 0$ 是时期效用函数的凹性（concavity）参数。这个函数显示了等于 $\alpha$ 的常数相对风险厌恶。[7] 基于这些假设，并使用加总的消费数据，许多的实证研究检验了以消费为基础的资产定价模型。[8]

Dunn 和 Singleton(1986)、Eichenbaum、 Hansen 和 Singleton(1988)等人对性质上可持续的消费支出建模。持续性导致了时间上的不*可分性*，因为消费服务的流量依赖于消费者过去的支出，而效用是定义在服务之上的。如果支出是持续的，当前的支出增加了消费者未来服务的效用。消费者对支出 $C_t$ 进行最优化；持续性因而意味着边际效用 $(\partial V/\partial C_t)$ 取决于过去时间的变量，而不取决 $t$ 期的变量。

如果效用函数显示出*习惯持久性* (habit persistence)，另一形式的时间不可分性就会产生。习惯持久性意味着在两个时点的消费是互补的。例如，当前消费的效用是以相对于过去消费的效用来评估的。Ryder 和 Heal(1973)、 Becker 和 Murphy(1988)、Sundaresan(1989)、Constantinides(1990)、Detemple 和 Zapatero(1991)以及 Novales(1992)等人推导出了这个模型。

Ferson 和 Constantinides(1991)对消费服务中的消费支出的持续性和习惯持久性同时建模。他们指出这两者相互补充而不是相互抵消。从对效应截取一期滞后的例子中，导出的支出效用是

$$V = (1-\alpha)^{-1} \sum_t \beta^t (C_t + bC_{t-1})^{1-\alpha} \tag{3.8}$$

$t$ 时期的边际效用是

$$(\partial V/\partial C_t) = \beta^t (C_t + bC_{t-1})^{-\alpha} + \beta^{t+1} b E_t\{(C_{t+1} + bC_t)^{-\alpha}\} \tag{3.9}$$

如果物品是耐用的且没有习惯持久性，那么系数 $b$ 为正且是折旧率的度量。如果习惯持久性出现而物品是非耐用的，则说明滞后支出有一个负的效应($b < 0$)。

Ferson 和 Harvey(1992)以及 Heaton(1995)考虑了一种强调季节性的时间不可分形式。效用函数是

[6] 资产定价模型特别关注证券收益对加总数量的关系。因此有必要加总单个的欧拉方程，以获得根据加总数量表示的均衡表达式。Gorman(1953)、Wilson(1968)、Rubinstein(1974)、Constantinides(1982)、Lewbel(1989)、Luttmer(1993)、Constantinides 和 Duffie(1994)讨论了确定加总数量使用的理论条件。

[7] 消费中的相*对风险厌恶*定义为 $-Cu''(C)/u'(C)$。绝对的风险厌恶为 $-u''(C)/u'(C)$，其中撇号代表求导。Ferson(1983)研究了以消费为基础的带有常数绝对风险厌恶的资产定价模型。

[8] 将(3.7)代入(3.6)可以看出 $m_{t+1} = \beta(C_{t+1}/C_t)^{-\alpha}$。这一模型的实证研究包括 Hansen 和 Singleton(1982,1983)、Ferson(1983)、Brown 和 Gibbons(1985)、Jagannathan(1985)、Ferson 和 Merrick(1987)以及 Wheatley(1988)。

$$(1-\alpha)^{-1}\sum_t \beta^t (C_t + bC_{t-4})^{1-\alpha}$$

其中假设消费支出的决策按季度作出，假设生活水平（习惯持久性存在时）或者服务流量（持续性存在）只依赖于前一年份相同季度的消费支出。

Abel(1990)研究了习惯持久性的一种形式，其中消费者以相对于前一个时期的加总消费来估计当前的消费，该消费被视为外生变量。效用函数如方程(3.8)，“习惯性存货”除外，$bC_{t-1}$ 是指加总的消费。原因在于人们总是注意“赶上潮流”。Campbell 和 Cochrane(1995)也发展了一个模型，其中习惯性存货也被消费者看作是外生的。这一方法产生了一个更为简单和更容易处理的模型，因为消费者的最优化不用考虑当前决策对未来习惯性存货的影响。

Epstein 和 Zin(1989,1991)考虑了一类递归的偏好，它可以写为 $V_t = F(C_t, CEQ_t(V_{t+1}))$。$CEQ_t(\cdot)$ 是未来终生效用 $V_{t+1}$ 在时间 $t$ 的“确定性等价物”。函数 $F(\cdot, CEQ_t(\cdot))$ 使得通常的终生消费期望效用函数一般化并且是时间不可分的。

Epstein 和 Zin(1989)研究了递归偏好模型的一个特例，其中偏好是

$$V_t = [(1-\beta)C_t^p + \beta E_t (V_{t+1}^{1-\alpha})^{p/(1-\alpha)}]^{1/p} \tag{3.10}$$

他们指出当 $p \neq 0$ 且 $1-\alpha \neq 0$ 时，代理人的 IMRS 变成

$$[\beta(C_{t+1}/C_t)^{p-1}]^{(1-\alpha)/p}\{R_{m,t+1}\}^{((1-\alpha-p)/p)} \tag{3.11}$$

其中 $R_{m,t+1}$ 是市场组合总收益。任何时间消费博弈的相对风险厌恶系数是 $\alpha$，而确定性消费的替代弹性是 $(1-p)^{-1}$。如果 $\alpha = 1-p$，则模型简化为时间可分的幂效用模型。如果 $\alpha = 1$，就得到了 Rubinstein(1976)的对数效用模型。

总之，许多资产定价模型是方程(3.1)的特殊形式。每个模型都设定了数据的特定函数且模型参数是有效的随机贴现因子。现在将讨论点转向这一形式的模型估计问题。

## 4. 广义矩方法

本节对广义矩方法（GMM）进行了综述并对相关的渐进检验统计作了简要的回顾。然后介绍怎样运用 GMM 评估和检验资产定价模型的各种设定。

### *4.1. 资产定价模型中广义矩方法综述*

令 $x_{t+1}$ 是可观测变量的向量。给定一个设定为 $m_{t+1} = m(\theta, x_{t+1})$ 的模型，用由 Hansen(1982)发展且由 Hansen 和 Singleton(1982)以及 Brown 和 Gibbons(1985)阐明的 GMM 法，则参数 $\theta$ 的估计和模型的检验就能在弱假设下进行。定义模型的误差项为：

$$u_{i,t+1} = m(\theta, x_{t+1})R_{i,t+1} - 1 \tag{4.1}$$

方程(3.1)隐含着对所有的 $i$，$E_t\{u_{i,t+1}\} = 0$。给定 $N$ 个资产和 $T$ 个时间的样本，将(4.1)的

误差项组合，形成行是$u'_{t+1}$的$T \times N$矩阵$u$。按照期望迭代法则（iterated expectation Law），模型表明，对所有的$i$和$t$（对$t$时期信息集中的任何$Z_t$）有$E(u_{i,t+1}|Z_t)=0$，因而对所有的$t$有$E(u_{t+1}Z_t)=0$。条件$E(u_{t+1}Z_t)=0$说明$u_{t+1}$正交于$Z_t$，因而被称为*正交性条件*。这些正交性条件是使用 GMM 对资产定价模型进行检验的基础。

需要强调几点。首先，资产定价模型的 GMM 估计和检验产生于$E(u_{i,t+1}|Z_t)=0$（对$t$时期信息集中的任何$Z_t$）。但是，实际估计中用到的是给定工具$Z_t$的集合下更弱的条件$E(u_{t+1}Z_t)=0$。因此，资产定价模型的 GMM 检验并没有完全利用这一理论预示的所有内容。我们相信进一步利用该理论的内涵将是有用的。

资产定价模型的实证研究依赖于*理性预期*(*rational expectations*)，它指模型中的期望项是条件数学期望。例如，当方程(3.1)中的期望项被看成条件数学期望并以$E(\cdot|Z_t)$和$E(Z_t)$来表达时，理性预期的假设得到了应用。理性预期意味着，观测到的事实与模型中期望值之间的差异应该与期望值的条件信息无关。

方程(3.1)表明$m_{t+1}$和$R_{i,t+1}$乘积的条件期望为常数 1.0。因此，当运用$t$时期的任何可得信息时，不应预测出方程(4.1)中的误差项$1-m_{t+1}R_{i,t+1}$与 0 有差异。如果使用工具$Z_t$就可以预测的收益$R_{i,t+1}$存在时间上的变化，则当$R_{i,t+1}$乘以一个有效的随机贴现因子$m_{t+1}$时，模型表示可预测性消失了。这意味着条件资产定价模型 “解释”资产收益变动的可预测性具有意义。这一观点将股票价值的“随机游动”模型（意味着股票收益是完全不可预测的）一般化。该模型是一个由风险中性引发的特殊情形。在风险中性下 IMRS 是一个常数。此时，方程(3.1)表明从预测角度看收益不应与常数有差异。

GMM 是这样估计的，即对样本均值正交性条件$G=(u'Z/T)$的一个$N \times L$矩阵进行定义，令$g=vec(G)$，其中$Z$是观测到的工具，它是行为$Z_t'$的$T \times L$矩阵，而且是$t$时期可获信息的一个子集。[9] $vec(\cdot)$算子表示把$G$分割成行向量，每一个行向量的长度为$L$：$(\underline{h}_1,\underline{h}_2,...,\underline{h}_N)$。然后把（各个）$h$堆叠成一个长度等于正交性条件数量$NL$的向量$g$。Hansen(1982)通过最小化二次型$g'Wg$，搜索使$g$接近于零的参数值获得关于 θ 的 GMM 估计，这里$W$是一个$NL \times NL$的加权矩阵。

更一般地，令$u_{n+1}(\theta)$表示随机$N$维向量$R_{t+1}m(\theta,x_{t+1})-1$，定义

[9] 本节假设同样的工具被应用于每一个资产方程。通常，每一个资产方程可以使用不同的工具集，但这会使符号复杂。

$g_T(\theta)=T^{-1}\sum_t(u_t(\theta)\otimes Z_{t-1})$。令$\theta_T$表示使二次型$g_T' A_T g_T$最小化的参数值，这里$A_T$可以是依赖于样本的任何正定的$NL\times NL$矩阵，并且令$J_T$表示二次型$g_T' A_T g_T$的最小值。Jagannathan 和 Wang(1993)证明$J_T$服从一个加权的卡方（weighted Chi-Square）分布，该分布能够检验(3.1)成立的假设。

**定理 4.1.** (Jagannathan 和 Wang，1993). 假定矩阵$A_T$依概率收敛于一个常数正定矩阵$A$。再假定$\sqrt{T}g_T(\theta_0)\to_d N(0,S)$，这里$N(.,.)$表示多元正态分布，$\theta_0$是真实参数值，$S$是一个正定矩阵。令

$$D=E[\partial g_T/\partial\theta]\big|_{\theta=\theta_0}$$

又令

$$Q=(S^{1/2})(A^{1/2})[I-(A^{1/2})'D(D'AD)^{-1}D'(A^{1/2})](A^{1/2})(S^{1/2})$$

其中，$A^{1/2}$和$S^{1/2}$是$A$和$S$的乔利斯基（cholesky）分解的上三角矩阵。那么矩阵$Q$有$NL$-$\dim(\theta)$个非零的正特征根。将这些特征根表示为$\lambda_i$（$i=1$，2，…，$NL$-$\dim(\theta)$），则$J_T$收敛于

$$\lambda_1\chi_1+\cdots+\lambda_{NL-\dim(\theta)}\chi_{NL-\dim(\theta)}$$

其中，$\chi_i$（$i=1$，2，…，$NL$-$\dim(\theta)$）为独立随机变量，每一随机变量服从自由度为1的卡方分布。

证明：参见 Jagannathan 和 Wang(1993)。

注意到当矩阵$A$是$W\equiv S^{-1}$时，矩阵$Q$是秩为$NL$-$\dim(\theta)$的幂等矩阵。因此$Q$的非零特征值是 1。在这种情形下，渐进分布变为一个简单的自由度为$NL$-$\dim(\theta)$的卡方分布。这是 Hansen(1982)考虑的一个特殊情形，是他最先推导出了$J_T$-统计量的渐进分布。$J_T$-统计量及定理 4.1 的扩展提供了模型 GMM 估计的拟合优度检验。

Hansen(1982)指出，对任何固定的$W$，使$g'Wg$最小化的$\theta$估计量是一致且渐进正态的。如果选择的加权矩阵$W$是正交化条件$S$的协方差矩阵的一致估计之逆，则估计量在固定$W$，使$g'Wg$最小化的一类估计量中是渐近有效的。参数向量的最优 GMM 估计量的渐进

方差矩阵为：

$$Cov(\theta)=[E(\partial g/\partial\theta)'WE(\partial g/\partial\theta)]^{-1} \tag{4.2}$$

其中$\partial g/\partial\theta$是一个$NL\times\dim(\theta)$的导数矩阵。实际中使用的是正交性条件样本均值渐进协方差的一致估计量。即用$\hat{C}ov(g)^{-1}$替代(4.2)中的$W$，并且将$E(\partial g/\partial\theta)$用相应的样本计算结果代替。Hansen(1982)给出了最优加权矩阵的一个一致估计量的例子：

$$\hat{C}ov(g)=[(1/T)\sum_t\sum_j(u_{t+1}u'_{t+1-j})\otimes(Z_tZ'_{t-j}) \tag{4.3}$$

其中$\otimes$表示克罗内克积。当正交性条件不存在序列相关时，就会产生一个通常被证明是很有用的特例。在此特殊情形中，最优加权矩阵是矩阵$\hat{C}ov(g)$的逆，这里

$$\hat{C}ov(g)=[(1/T)\sum_t(u_{t+1}u'_{t+1})\otimes(Z_tZ'_t)] \tag{4.4}$$

最早由Hansen(1982)提出的GMM加权矩阵有一些缺点。估计量无法保证是正定的，并且在某些应用中可能具有不好的有限样本特性。许多研究工作探讨了GMM加权矩阵的其他估计量。一个突出的例子是由Newey和West(1987a)提出的用Barleit权重对(4.3)中的自协方差项加权以得到一个半正定矩阵。Andrews(1991)，Andrews和Monahan(1992)，及Ferson和Foerster(1994)提出了提高有限样本特性的其他改进设计。

### *4.2 GMM的检验假设*

如上所述，当模型是过度识别时，$J_T$-统计量提供了GMM估计模型的拟合优度检验。Hansen的$J_T$-统计量是运用GMM的金融文献中最广泛使用的检验。其他的以GMM为基础的标准统计检验方法也出现在金融文献中，用以检验资产定价模型。其中一个是Wald检验的推广，第二个是似然比检验统计量的类推。Newey(1985)以及Newey和West(1987b)回顾了以GMM为基础的其他检验统计量。

对于Wald检验，考虑检验一个由赋值函数$H(\theta)=0$表述的M维向量的假设，这里$M\le\dim(\theta)$。$\theta$的GMM估计量服从均值为$\theta$和方差矩阵为$\hat{C}ov(\theta)$的渐进正态分布。给定标准正则性条件，估计量$\hat{H}$服从均值为零、方差矩阵为$\hat{H}_\theta\hat{C}ov(\theta)\hat{H}'_\theta$的渐进正态分布，这里下标表示偏导数，并且二次型

$$T\hat{H}'[\hat{H}_\theta\hat{C}ov(\theta)\hat{H}'_\theta]^{-1}\hat{H}$$

服从渐进卡方分布，它提供了标准的Wald检验。

似然比类型的检验法是由Newey和West(1987b)、Eichenbaum，Hansen和Singleton(1988，附录C)以及Gallant(1987)阐述的。Newey和West(1987b)称其为$D$检验。假设零假设表示正交性条件$E(g^*)=0$成立，而在备择假设下子集$E(g)=0$成立。例如，

$g^* = (g, h)$。当我们在零假设下估计模型时，二次型 $g^*{}'W^*g^*$ 被最小化。令 $W_{11}^*$ 表示 $W^*$ 的左上分块；就是说，令它是在零假设下 $Cov(g)^{-1}$ 的估计。当我们使这个矩阵保持固定时，在备择假设下通过最小化 $g'W_{11}^*g$ 就可以估计模型。两个二次型的差

$$T[g^*{}'Wg^* - g'W_{11}^*g]$$

服从渐进卡方分布。当零假设为真时，其自由度等于 $M$。Newey 和 West(1987b)描述了这些检验的其他方差。

### 4.3 *举例说明：用 GMM 检验条件 CAPM*

CAPM 把非线性过度识别约束施加在资产收益的一阶和二阶矩上。这些约束能够形成经济计量检验的基础。为了能更清楚地认识这些约束，请注意，如果一个计量经济学家已知或者能够估计 $Cov(R_{it}, R_{mt})$，$E(R_{mt})$，$Var(R_{mt})$ 和 $E(R_{0t})$，则运用方程(2.1)就有可能从 CAPM 中计算 $E(R_{it})$。给定 $E(R_{it})$ 的直接样本估计值，期望收益是过度识别的。通过判断资产的期望收益是否不同于模型给定的期望收益，就有可能运用过度识别来构建 CAPM 的检验。本节中我们通过运用传统的收益-beta 公式和 CAPM 的随机贴现因子表示法说明这个检验。这些例子可以很容易地扩展到多 beta 模型。

#### 4.3.1 *静态的或者无条件的 CAPM*

如果我们假设 CAPM 中所有期望值项都指的是无条件期望值，我们就得到了 CAPM 的*无条件形式*。运用方程(3.1)以及方程(3.4)给出的随机贴现因子表示法就可以直接估计 CAPM 的无条件形式。随机贴现因子为

$$m_{t+1} = c_0 + c_1 R_{mt+1}$$

这里 $c_0$ 和 $c_1$ 是固定的参数。如果只用到无条件期望值，模型隐含着

$$E\{(c_0 + c_1 R_{mt+1})R_{t+1} - 1\} = 0$$

其中 $R_{t+1}$ 是总资产收益的向量。样本正交性条件的向量是

$$g_T = g_T(c_0, c_1) = (1/T)\sum_t \{(c_0 + c_1 R_{mt+1})R_{t+1} - 1\}$$

对于资产数 $N > 2$，正交性条件的个数是 $N$ 并且参数的个数为 2，所以 $J_T$-统计量具有 $N-2$ 的自由度。用随机贴现因子表示法检验无条件的 CAPM 是由 Carhart 等.(1995)以及 Jagannathan 和 Wang(1996)进行的，他们拒绝了使用战后美国月度数据的模型。

无条件的 CAPM 检验也可以运用方程(2.1)给出的线性收益-beta 公式和 GMM 来进行。令 $r_t = R_t - R_{0t}\underline{1}$ 表示超额收益向量，这里 $R_{0t}$ 表示某一参照资产的总收益，$\underline{1}$ 是 $N$ 维 1 向量；

再令$u_t = r_t - \beta r_{mt}$，这里$\beta$是相对于市场的超额收益的$N$维 beta 向量，且$r_{mt} = R_{mt} - R_{0t}$是市场组合的超额收益。模型表明

$$E(u_t) = E(u_t r_{mt}) = 0$$

令工具变量为$Z_t = (1, r_{mt})'$，那么样本正交性条件为

$$g_T(\beta) = T^{-1} \sum_t (r_t - \beta r_{mt}) \otimes Z_t$$

正交性条件的个数是$2N$而参数的个数为$N$，所以模型是过度识别的，可以用$J_T$-统计量进行检验。

用收益-beta 公式检验模型的另一个方法是在假设期望收益与 CAPM 预测收益相差一个被称为*詹森阿尔法*（Jensen’s Alphas）的参数向量$\alpha$的情况下来估计模型。重新定义$u_t = r_t - \alpha - \beta r_{mt}$，模型有$2N$个参数和$2N$个正交性条件，所以它是恰好识别的。很容易看出$\alpha$和$\beta$的 GMM 估计量等于 OLS 估计量，并且方程(4.4)产生了 White(1980)的异方差一致标准误（Standard errors）。可以用 Wald 检验或者上述的$D$-统计量来检验 CAPM。

MacKinlay 和 Richardson(1991)用线性收益-beta 公式和 GMM 检验了无条件 CAPM，他们拒绝了美国月份数据的模型。

*4.3.2. 条件 CAPM*

收益率分布变动可预测性的大量证据以及拒绝无条件 CAPM 的实证研究，引发了始于 20 世纪 80 年代初对条件形式 CAPM 的实证研究。在一个*条件资产定价模型*中，假定其中的期望值是给定的公共信息集的条件期望。公共信息集是由预先确定的工具变量$Z_t$的向量表示的。Merton(1973)及 Cox， Ingersoll 和 Ross(1985)的多 beta 模型包容了条件期望。Merton(1973，1980)和 Cox-Ingersoll-Ross 也说明，CAPM 的条件形式可作为其跨时期模型的一个特殊形式来推导。Hansen 和 Richard(1987)描述了均值-方差有效性的条件和无条件形式之间的理论关系。

条件资产定价模型最早的实证公式是由 Hansen 和 Hodrick(1983)及 Gibbons 和 Ferson(1985)发展的*潜变量模型*，后来经 Campbell(1987)及 Ferson， Foerster， 和 Keim(1993)改进。这些模型允许期望收益随时间变动，但保留了条件 beta 为固定参数的假设。在这些假设下，考虑 CAPM 的线性收益-beta 表示，记为$E(r_t | Z_{t-1}) = \beta E(r_{mt} | Z_{t-1})$。收益由超出无风险资产收益的部分度量。令$r_{1t}$是具有非零$\beta_1$的某一参照资产的收益，所以

$$E(r_{1t} | Z_{t-1}) = \beta_1 E(r_{mt} | Z_{t-1})$$

解关于$E(r_{mt} | Z_{t-1})$的这一表达式并替换，得到

$$E(r_t | Z_{t-1}) = C E(r_{1t} | Z_{t-1})$$

这里$C=(\beta./\beta_1)$，且./ 表示元素对元素相除。有了这一替代，期望市场风险溢价成为模型中的潜变量，并且$C$成为模型参数的$N$维向量。当我们构造误差项$u_t=r_t-Cr_{1t}$时，模型意味着$E(u_t|Z_{t-1})=0$，而我们能够运用 GMM 来估计和检验模型。鉴于度量真实市场组合的困难，Gibbons 和 Ferson(1985)证明潜变量模型是有吸引力的。但 Wheatley(1989)强调这一模型仍需要假设 beta 对不可观测的市场组合的比率是常数参数。

Campbell(1987)及 Ferson 和 Foerster(1995)研究表明，用美国数据的单 beta 潜变量模型被拒绝了。这一发现拒绝了假设：存在一个（有条件的）最小方差组合使得这个组合的条件 beta 比率是固定参数。因此，实证证据表明条件资产定价模型必须与以下二者之一保持一致：（1）随时间变动的 beta；（2）每个资产有多个的 beta。[10]

Ferson 和 Harvey(1991)， Evans(1994)，及 Ferson 和 Korafczyk(1995)实证检验了具有常数 beta 的条件多 beta 模型。他们用通常的统计检验拒绝了这样的模型，但是发现它们仍能捕获股票和债券收益随时间变动的可预测性的大部分。在允许 beta 随时间变化时，这些研究发现 beta 的时间变差（Time-variation）导致了期望资产收益的相对小的时间变差。考虑以下近似就可获得这一发现的直观感觉。假设期望超额收益的时间变差（Time-variation）为$E(r|Z)=\lambda\beta$，这里$\lambda$是各因子随时间变化的期望风险溢价向量，$\beta$是一个随时间变化的 beta 的矩阵。使用泰勒级数，可以得到近似式：

$$Var[E(r|Z)]\approx E(\beta)'Var[\lambda]E(\beta)+E(\lambda)'Var[\beta]E(\lambda)$$

分解式中的第一项反映了随时间变化的风险溢价的贡献；第二项反映了随时间变化的 beta 值的贡献。由于在月份数据中 beta 的期望值$E(\beta)$为 1.0，而平均风险溢价$E(\lambda)$明显地小于 0.01，因此第一项超过了第二项。这说明从对期望资产收益的可预测变动建模的角度看，条件 beta 的时间变差不如期望风险溢价的时间变差重要。

而从对资产收益的可预测时间变差建模的角度看，条件 beta 的时间变差不如期望风险溢价的时间变差重要，这并不表示 beta 的变化在实证上是不重要的。从对期望资产收益横截面变差建模的角度看，beta 的时间变差则可能是非常重要的。为了说明这一点，考虑由以下模型得到的无条件的期望超额收益向量：

$$E\{E(r|Z)\}=E\{\lambda\beta\}=E(\lambda)E(\beta)+Cov(\lambda,\beta)$$

作为横截面关系，$Cov(\lambda,\beta)$项在资产的横截面上可能发生显著变化。因此， CAPM 的条件形式对无条件期望收益的横截面的解释可能主要依赖于 beta 和期望市场风险溢价的共同时间变差。Jagannathan 和 Wang(1996)的检验表明这是符合事实的。

Harvey(1989)用期望市场溢价与条件市场方差的比率是一个固定参数的假设替代常数 beta 假设，表示为：

$$E(r_{mt}|Z_{t-1})/Var(r_{mt}|Z_{t-1})=\gamma$$

[10] 具有一个以上的固定 beta 且具有随时间变动的风险溢价的模型通常与每一资产的单个随时间变化的 beta 相一致。例如，假设有两个具有常数 beta 和随时间变化的风险溢价的因子，则这两个因子的时间变化的结合就是一个最小方差组合。

依照条件 CAPM，则条件期望收益可以写成：

$$E(r_t|Z_{t-1}) = \gamma Cov(r_t, r_{mt}|Z_{t-1})$$

Harvey 的条件 CAPM 形式得益于 Merton(1980)模型的启发。在 Merton(1980)的模型中被称为*风险的市场价格*的比率$\gamma$等于均衡时代表性投资者的相对风险厌恶。Harvey 还假设市场上的条件期望风险溢价（和已知固定$\gamma$的条件市场方差）是工具变量的线性函数，表示为：

$$E(r_{mt}|Z_{t-1}) = \delta_m' Z_{t-1}$$

这里$\delta_m$是系数向量。定义误差项为$v_t = r_{mt} - \delta_m' Z_{t-1}$和$w_t = r_t(1 - v_t\gamma)$。模型表明堆叠的误差项$u_t = (v_t, w_t)$满足$E(u_t|Z_{t-1}) = 0$，所以可用 GMM 直接估计模型，然后检验。Harvey(1989)用美国的月份数据拒绝了条件 CAPM 的形式。当运用世界市场组合和 21 个发达国家股票市场的月份数据时，Harvey(1991)拒绝了同样的公式。

使用方程(3.4)给出的随机贴现因子表示法：$m_{t+1} = c_{0t} - c_{1t} R_{mt+1}$，可以检验条件 CAPM。此时，系数$c_{0t}$和$c_{1t}$是信息集合$Z_t$的可测量函数。为了对模型进行实证，有必要设定$c_{0t}$和$c_{1t}$的函数形成。从(3.4)中可以看出这些系数是条件期望市场收益及其条件方差的非线性函数。至今仍无设定这一函数形式的理论指导。Cochrane(1996)建议用线性函数来逼近系数，这一方法被 Carhart 等(1995)采纳，他用美国的月份数据拒绝了条件 CAPM。

Jagannathan 和 Wang(1993)指出条件 CAPM 包含了一个*无条件*的双因子模型：

$$m_{t+1} = a_0 + a_1 E(r_{mt+1}|I_t) + R_{mt+1}$$

这里$I_t$表示投资者的信息集，$a_0$和$a_1$是固定参数。他们指出，当所选择的$m_{t+1}$满足$E(R_{i,t+1} m_{t+1}) = 1$时，上式是一个有效的随机贴现因子。使用一组可观测的工具$Z_t$，并假设$E(r_{mt+1}|Z_t)$是$Z_t$的线性函数，他们发现这一模型形式比 CAPM 的无条件形式更好地解释了无条件期望收益的横截面。Bansal 和 Viswanathan(1993)发展了 CAPM 的条件形式和多因子模型，其中的随机贴现因子$m_{t+1}$是市场或者因子收益的非线性函数。用非参数方法，他们发现了支持模型的非线性形式的证据。利用国际市场股票、债券和货币收益率的数据，Bansal， Haieh 和 Viswanathan(1993)比较了非线性模型和线性模型的表现，发现非线性模型表现更好。用随机贴现因子表示法对条件 CAPM 和多 beta 模型的其他实证检验已开始在文献中出现。我们期待未来的研究将更进一步改善各种实证设定之间的关系。

## 5. 模型诊断

我们已经讨论了与特定的理论资产定价模型相对应的随机贴现因子的几个例子，并且阐明如何检验这些模型是否赋予金融资产正确的期望收益。这些模型的随机贴现因子是计量经

济学家观测到的数据的特定参数函数。虽然以这些参数方法为基础的实证研究产生了令人感兴趣的观点，但参数方法对经济环境作了很强的假设。本节讨论有关资产定价模型问题的其他计量方法。

*5.1. 矩不等式约束*

当假定尽可能小的结构时，Hansen 和 Jagannathan(1991)从资产定价模型推导出约束条件。特别地，他们假设金融市场遵循一价定律并且不存在套利机会。这些假设足以说明存在一个随机贴现因子 $m_{t+1}$（如果没有套利，它几乎必定（almost surely）为正）使得方程(3.1)得以满足。

请注意如果随机贴现因子是一个退化的随机变量（即一个常数），则方程(3.1)意味着所有的资产必须获得相同的期望收益。如果资产获得不同的期望收益，那么随机贴现因子就不可能是一个常数。换句话说，期望资产收益的横截面差异带有满足方程(3.1)的有效随机贴现因子方差的含义。Hansen 和 Jagannathan 充分利用这一观测结果推导出了随机贴现因子波动率的下界。Shiller(1979，1981)、 Singleton(1980) 及 Leroy 和 Porter(1981)推导出了特殊模型中相关波动率的边界，他们的实证研究还表明包含在简单模型中的随机贴现因子的波动率并不足以解释不同资产的期望收益。Hansen 和 Jagannathan(1991)说明了如何把这个波动率边界当作一般的诊断工具来使用。

接下来我们推导 Hansen 和 Jagannathan(1991)边界并讨论其实证应用。为了简化起见，仅利用条件期望收益，并集中于边界的无条件形式。我们提出一个假设：无条件、无风险的资产，且收益为 $R_f = E(m_{t+1})^{-1}$。取 $R_f$ 或者等价的 $E(m_{t+1})$ 值作为一个变动的参数来描述边界。

一价定律保证了满足方程(3.1)的随机贴现因子的存在。考虑以下任何 $m_{t+1}$ 在总资产收益向量 $R_{t+1}$ 上的投影（projection）：

$$m_{t+1} = R'_{t+1}\beta + \varepsilon_{t+1} \tag{5.1}$$

其中，

$$E(\varepsilon_{t+1}R_{t+1}) = 0$$

这里 $\beta$ 是投影系数向量。方程(5.1)的两边同乘以 $R_{t+1}$ 并取期望值，利用 $E[R_{t+1}\varepsilon_{t+1}] = 0$ 就得到一个可以解出 $\beta$ 的表达式。把这个表达式代回(5.1)，就给出了投影的“拟合值”如下：

$$m^*_{t+1} = R'_{t+1}\beta = R'_{t+1}E(R'_{t+1}R'_{t+1})^{-1}\underline{1} \tag{5.2}$$

通过查验，当用 $m^*_{t+1}$ 来代替 $m_{t+1}$ 时方程(3.1)得到了满足。从这个意义上说，方程(5.2)中的 $m^*_{t+1}$ 是一个有效随机贴现因子，因此，我们已经构造了随机贴现因子 $m^*_{t+1}$， 它同时是给定的 $N$ 个资产中的一个投资头寸报酬 ，其中向量 $E(R'_{t+1}R'_{t+1})^{-1}\underline{1}$ 给出了权重。这个报酬是可得资

产报酬空间中每一个容许随机贴现因子的唯一线性最小二乘近似值。

用 $m_{t+1}^*$ 替代方程(5.1)中的 $R_{t+1}'\beta$，这表明可以把任何一个随机贴现因子 $m_{t+1}$ 写成

$$m_{t+1} = m_{t+1}^* + \varepsilon_{t+1}$$

其中 $E(\varepsilon_{t+1} m_{t+1}^*) = 0$。它遵从 $Var(m_{t+1}) \ge Var(m_{t+1}^*)$。这个表达式是 $m_{t+1}$ 变动的 hansen-Jagannathan 边界[11]的基础。由于 $m_{t+1}^*$ 只依赖于 $N$ 个收益的二阶矩矩阵，下界也只依赖于计量经济学家可获得的资产数据，而不依赖于所研究的特定资产定价模型。为了从标的资产的收益矩，获得方差边界的一个明确的表达式，对前面的表达式进行替换，得到

$$\begin{aligned} Var(m_{t+1}) &\ge Var(m_{t+1}^*) \\ &= \beta' Var(R_{t+1})\beta \qquad (5.3) \\ &= [Cov(m,R')Var(R)^{-1}] \times Var(R)[Var(R)^{-1}Cov(m,R')] \\ &= [\underline{1} - E(m)E(R')]Var(R)^{-1}[\underline{1} - E(m)E(R')] \end{aligned}$$

这里隐去了时间下标以简化符号，最后一行是从 $E(mR) = \underline{1} = E(m)E(R) + Cov(m,R)$ 得来的。当我们改变 $E(m) = R_f^{-1}$ 的假设值时，方程(5.3)描绘了在 $E(m)$，$\alpha(m)$ 空间中的一条抛物线，其中 $\alpha(m)$ 是 $m_{t+1}$ 的标准差。如果把 $\alpha(m)$ 置于 $y$ 轴而把 $E(m)$ 置于 $x$ 轴，Hansen-Jagannathan 边界就象是一只杯子，其意义在于任何一个有效的随机贴现因子 $m_{t+1}$ 都必须具有使之处于杯中的均值和标准差。

方程(5.3)给出的随机贴现因子波动率的下界与金融经济文献中长期使用的标准均值-方差分析关系密切。为了说明这一点，回想起若 $r = R - R_f$ 是超额收益向量，那么(3.1)意味着

$$0 = E(mr) = E(m)E(r) + \rho\sigma(m)\sigma(r)$$

由于 $-1 \le \rho \le 1$，对所有的 $i$ 有

$$\sigma(m)/E(m) \ge E(r_i)/\sigma(r_i)$$

这个表达式的右边是资产 $i$ 的*夏普比率*。夏普比率被定义为资产的期望超额收益除以超额收益的标准差（参见 Sharpe1994 对这个比率的最新讨论）。考虑将 $N$ 个资产所能构造的每一个组合描绘在标准差（$x$ 轴）与均值（$y$ 轴）平面上，在给定均值收益时，具有最小可能标准差的投资组合的集合就是最小方差边界。考虑从 $y$ 轴上的点 $1/E(m)$ 引出的最小方差边界

[11] Kandel 和 Stambaugh(1987)、Mackinlay(1987,1995)及 Shanken(1987)推导了相关的边界。

的切线。切点是资产收益的组合。切线的斜率是夏普比率的最大值。当给定 $N$ 个资产的一个集合和无风险利率 $R_f = 1/E(m)$ 时，就可以得到这个夏普比率的最大值。这条线的斜率也等于 $R_f$ 乘以给定 $E(m) = R_f^{-1}$ 时 $\sigma(m)$ 的 Hansen-Jagannathan 下界。也就是说，对给定的 $R_f$，我们有

$$\sigma(m) \geq E(m)\left|Max\{E(r_i)/\sigma(r_i)\}\right|$$

前面的分析是以等价于一价定律的方程(3.1)为基础的。如果不存在套利机会，则说明 $m_{t+1}$ 是一个严格为正的随机变量。Hansen 和 Jagannathan（1991）指出如何利用无套利机会的约束来获得 $m_{t+1}$ 的标准差的更严格的边界。他们还说明了如何把条件变量融合到分析中。Snow(1991)扩展了 Hansen-Jagannathan 的分析，其中包含资产收益的更高阶矩。他的扩展是基于 Holder 不等式。该不等式隐含对于给定的 $\delta$ 和 $p$ 值，因为

$$(1/\delta) + (1/p) = 1$$

所以如下不等式是真实的：

$$E(mR) \leq E(m^{\delta})^{1/\delta} E(R^{p})^{1/p}$$

Cochrane 和 Hansen(1992)改进了 Hansen-Jagannathan 边界，使边界考虑到有关给定的随机贴现因子和资产收益向量之间的相关关系信息。这就提供了一组比原来的边界更严格的约束条件，后者仅是充分利用了相关系数必须在-1 和+1 之间这一条件。

*5.2. 矩不等式约束的统计推断*

Cochrane 和 Hansen(1992)、Burnside(1994) 及 Cecchett、 Lam 和 Mark(1994)阐述了在检验一个特定的候选随机贴现因子是否满足 Hansen-Jagannathan 边界时应如何考虑抽样误差。根据 Cochrane 和 Hansen（1992）的讨论，下面简述一个考虑了抽样误差的计算。

假定计量经济学家有一个包含 $T$ 个观测值的作为候选随机贴现因子的时间序列，以 $y_t$ 表示，$N$ 个资产的收益以 $R_t$ 表示。我们还假定无风险资产在 $N$ 个资产当中。因此 $v = E(m) = 1/R_F$ 是一个未知的待估参数。考虑 $m_{t+1}$ 对单位向量和资产收益向量的线性回归，形如 $m_{t+1} = \alpha + R_t'\beta + u_{t+1}$。我们利用以下总体矩条件系统中的回归函数：

$$E(\alpha + R_t'\beta) = v \tag{5.4}$$

$$E(R_t\alpha + R_tR_t'\beta) = \underline{1}_N$$

$$E(y_t) = v$$

$$E[(\alpha + R_t'\beta)^2] - E[y_t^2] \le 0\,.$$

第一个方程说明 $m_{t+1} \equiv \alpha + R_t'\beta$ 的期望值等于 $v$。第二个方程说明 $m_t$ 的回归函数是一个有效随机贴现因子。第三个方程说明 $v$ 是我们要检验的那个特定候选随机贴现因子的期望值。第四个方程说明特定的候选随机贴现因子满足 Hansen-Jagannathan 边界。

把(5.4)中的最后一个不等式当作等式并使用 GMM，则利用 (5.4)中的 $N+3$ 个方程可以估计出参数 $v$，$\alpha$ 和 $N$ 维向量 $\beta$。把最后一个式子当作等式看待，它相当于零假设：$y_t$ 的均值和方差使之处在 Hansen-Jagannathan 边界上。在零假设“(5.4)中的的最后一个方程作为一个等式成立”下，GMM 的准则函数 $J_T$ 的最小值乘以 $T$ 服从一个自由度为 1 的卡方分布。Cochrane 和 Hansen(1992)建议用单边检验法检验不等式关系。

### *5.3. 设定误差边界*

至此我们考察的方法大多数是在零假设“经济计量学家考虑的资产定价模型为所有的资产设计了正确的价格（或期望收益）”下进行的。备择假设是“模型是错误的”同时考察模型的错误程度。在这一节中，我们将遵循 Hansen 和 Jagannathan(1994)的研究讨论一个可能的方法，用以考察模型中的缺省并设计一个模型设定误差的标量测度(scalar measure)。[12]

令 $y_t$ 表示对应于给定的资产定价模型的候选随机贴现因子，令 $m_{t+1}^*$ 表示先前构造的唯一的随机贴现因子并作为资产报酬的组合。我们假定 $E[y_t R_t]$ 不等于 $\underline{1}_N$，$\underline{1}_N$ 是 $N$ 维 1 向量。也就是说，模型并没有给所有的总收益正确定价。把 $y_t$ 投影到 $N$ 个资产收益上得到 $y_t = R_t'\alpha + u_t$，并把 $m_t^*$ 投影到资产收益向量上得到 $m_t^* = R_t'\beta + \varepsilon_t$。由于候选的 $y_t$ 并没有给所有的资产正确定价，所以 $\alpha$ 和 $\beta$ 不会相同。定义 $p_t = (\beta - \alpha)' R_t$ 作为候选随机贴现因子 $y_t$ 的*修正报酬(modifying payoff)*。很清楚，$(y_t + p_t)$ 是满足方程(3.1)的有效随机贴现因子。Hansen 和 Jagannathan(1994)推导了以修正报酬的大小为基础的设定检验，它度量了候选随机贴现因子 $y_t$ 与一个有效随机贴现因子的距离。Hansen 和 Jagannathan(1994)证明这一距离的自然度量是 $\delta = E(p_t^2)$，它为模型的错误设定提供了一个经济解释。与 $p_t$ 正交的报酬是被候选的 $y_t$ 正确定价的。$E(p_t^2)$ 是使用 $y_t$ 给任何一个标准化的拥有单位二阶矩的报酬错误定价的最大数量。修正报酬 $p_t$ 同时是最小化修正，它足以使 $y_t$ 成为一个有效随机贴现因子。

[12] Newey(1985)考察了一般背景下的、以 GMM 为基础的模型设定检验。其他相关的研究包括 Boudoukh、Richardson 和 Smith(1993)，他们计算了不等式约束出现时检验统计量概率的近似边界；Chen 和 Knez(1992)使用相关的方法发展了市场一体化的非参数测度；Hansen、Heaton 和 Luttmer(1995)说明了当存在市场摩擦时，如卖空限制或一定比例的交易成本，如何计算设定误差和波动率边界。

Hansen 和 Jagannathan(1994)考虑了以下最大化问题的解作为距离测度的估计量$\delta$，

$$\delta_T = Max_\alpha T^{-1} \sum_t [y_t^2 - (y_t + \alpha' R_t)^2 + 2\alpha' \underline{1}_N]^{1/2} \tag{5.5}$$

如果$\alpha_T$是(5.5)的解，那么修正报酬的估计是$\alpha_T' R_t$。可以很容易地证明(5.5)的一阶条件，说明$\alpha_T' R_t$满足了与资产定价方程(3.1)相对应的的样本形式。

为了获得与估计值$\delta_T$相联系的抽样误差的估计，考虑

$$u_t = y_t^2 - (y_t + \alpha_T' R_t)^2 + 2\alpha_T' \underline{1}_N$$

$u_t$的样本均值是$\delta_T^2$。通过利用 Newey 和 West(1987a)或 Andrews(1991)中描述的零频率谱密度估计量并且运用于时间序列$\{u_t - \delta_T^2\}_{t=1...T}$，可以得到$\delta_T^2$的方差的一致估计量。令$s_T$表示用此方法得到的$\delta_T^2$的估计标准差。那么，在标准假设下，$T^{1/2}(\delta_T - \delta)/s_T$收敛于一个服从$N(0,1)$分布的随机变量。因此，运用 delta 方法，我们得到

$$T^{1/2}\,\delta_T / 2s_T\,(\delta_T - \delta) \to N(0,1) \tag{5.6}$$

## 6. 结论

本文回顾了各种资产定价模型的经济计量检验，这些模型以一价定律，无套利原则以及投资者收益最大化化的市场均衡模型为基础。我们的讨论包括最早的均衡资产定价模型、CAPM，并且考虑了动态多 beta 和套利定价模型。我们对表达为线性收益-beta 公式的资产定价模型，给出了其传统两步骤估计量渐进分布的一些结果，并强调使用 Hansen(1982)的广义矩方法对资产定价模型作经济计量评估。我们的例子阐明了 GMM 方法的简单性和灵活性，指出大多数资产定价模型可以表示成*随机贴现因子*的形式，它使得 GMM 的应用直截了当。最后，讨论了模型的诊断，它提供了 GMM 检验中统计拒绝原因的其他见解并且有助于评价这些模型中的设定误差。

## 附录

定理 2.1 的证明 证明来源于 Jagannathan 和 Wang(1996)。

首先引入一些其他的符号。令$I_N$表示$N$维单位矩阵且$1_T$表示$T$维单位向量。根据方程(2.7)得：

$$R - \mu = T^{-1}(I_N \otimes 1_T')'\varepsilon_k, \quad k = 1, \quad \ldots, \quad K_2$$

其中

$$\varepsilon_k = (\varepsilon_{1k1}, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{1kT}, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{Nk1}, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{NkT})'$$

通过$b_k$的定义，我们有

$$b_k - \beta_k = [I_N \otimes (f_k' f_k)^{-1} f_k']\varepsilon_k$$

这里 $f_k$ 是与向量 $\varepsilon_k$ 相似的去均值的因子实现(the vector-demeaned factor realizations)。给定因子（表示为 $f_k$ ）的时间序列，根据假定，$\varepsilon_{ikt}$ 和 $\varepsilon_{jlt}$ 的条件协方差是一个固定常数 $\sigma_{ijkl}$，我们有

$$\begin{aligned}
&E[(b_k - \beta_k)(R_1 - \mu_1) | f_k] \\
&= T^{-1}[I_N \otimes ((f_k' f_k)^{-1} f_k')]E[\varepsilon_k \varepsilon_l' | f_k](I_N \otimes 1_T) \\
&= T^{-1}[I_N \otimes ((f_k' f_k)^{-1} f_k')]\textstyle\sum_{kl}(I_N \otimes 1_T) \\
&= T^{-1}\textstyle\sum_{kl} \otimes [(f_k' f_k)^{-1} f_k' 1_T] = 0
\end{aligned}$$

这里我们用 $\sum_{kl}$ 表示矩阵 $\{\sigma_{ijkl}\}_{ij}$。最后一行是依据 $f_k' 1_T = 0$ 得到的。因此，我们已经证明 $(b_k - \beta_k)$ 与 $(R - \mu)$ 无关。所以，$u$ 和 $h\gamma_2$ 应该是无关的，并且方程(2.15)中 $T^{1/2}(g - \gamma)$ 的渐进方差由下式给出

$$(x'x)^{-1} x'[Var(u) + Var(h\gamma_2)]x(x'x)^{-1} \quad 。$$

令 $\pi_{ijkl}$ 表示当 $T \to \infty$ 时 $Cov(\sqrt{T} f_k' \varepsilon_{ik}, \sqrt{T} f_l' \varepsilon_{jl})$ 的极限值。令第 $ij$ 个元素是 $\pi_{ijkl}$ 的矩阵为 $\prod_{kl}$。我们假定因子的样本协方差矩阵存在并且依概率收敛于一个元素为 $\Omega_{kl}$ 的常数正定矩阵 $\Omega$。由于 $\sqrt{T}(b_{ik} - \beta_{ik})$ 依分布收敛于随机变量 $\Omega_{kk}^{-1} \sqrt{T} f_k' \varepsilon_{ik}$，我们有

$$Var(h\gamma_2) = \textstyle\sum_{l,k=1,\ldots,K_2} \gamma_{2k}\gamma_{2l}\Omega_{kk}^{-1} \prod_{kl} \Omega_{ll}^{-1}$$

且

$$\begin{aligned}
W &= (x'x)^{-1} x' Var(h\gamma_2) x(x'x)^{-1} \\
&= \sum_{l,k=1,\ldots,K_2} (x'x)^{-1} x' \{\gamma_{2k}\gamma_{2l}(\Omega_{kk}^{-1} \prod_{kl} \Omega_{ll}^{-1})\} x(x'x)^{-1}
\end{aligned}$$

这里 $\prod_{kl}'$ 是一个矩阵，它的第 $ij$ 元素是当 $T \to \infty$ 时 $Cov(\sqrt{T} f_k' \varepsilon_{ik}, \sqrt{T} f_l' \varepsilon_{jl})$ 的极限值。

Q.E.D.

## 参考文献

Abel, A. (I990). Asset prices under habit formation and catching up with the Jones. Amer. Econom.

Rev. Papers Proc. 80, 38-42.
Andrews, D. W. K. (1991). Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation. Econometrica 59, 817-858.
Andrews, D. W. K. and J. C. Monahan (1992). An improved heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimator. Econometrica 60, 953-966.
Arrow, K. J. (1970). Essays in the Theory of Risk-Bearing. Amsterdam: North-Holland.
Bonsal,R.and S. Viswanathan(1993). No- arbitrage and arbitrage pricing: A new approach. J. Finance 8, 1231-1262.
Bonsal, R., D, A. Hsieh and S. Viswanathan (1993). A new approach to international arbitrage pricing. J. Finance 48, 1719--1747.
Becket, G. S. and K. M. Murphy (1988). A theory of rational addiction. J. Politic. Econom. 96, 675-700.
Beja, A. (1971). The structure of the cost of capital under uncertainty. Rev. Econom. Stud. 38(8), 359-368.
Berk, J. B. (1995). A critique of size-related anomalies. Rev. Financ. Stud. 8, 275-286.
Black, F. (1972). Capital market equilibrium with restricted borrowing. J. Business 45, 444-455.
Black, F., M. C. Jensen and M. Scholes (1972). The capital asset pricing model: Some empirical tests. In: Studies in the Theory of Capital Markets, M. C. Jensen, ed., New York: Praeger, 79-121.
Boudoukh, J., M. Richardson and T. Smith (1993). Is the ex ante risk premium always positive? A new approach to testing conditional asset pricing models. J. ~Financ. Econom. 34, 387-408.
Breeden, D. T. (1979). An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. J. Financ. Econom. 7, 265-296.
Brown, D. P. and M. R. Gibbons (1985). A simple econometric approach for utility-based asset pricing models. J. Finance 40, 359-381.
Burnside, C. (1994). Hansen-Jagannathan bounds as classical tests of asset-pricing models. J. Business Econom. Statist. 12, 57-79.
Campbell, J. Y. (1987). Stock returns and the term structure. J. Financ. Econom. 18, 373-399.
Campbell, J. Y. and J. Cochrane (1995).By force of habit. Manuscript, Harvard Institute of Economic Research, Harvard University.
Carhart, M., K. Welch, R. Stevens and R. Krail (1995). Testing the conditional CAPM. Working Paper, University of Chicago.
Cecchetti, S. G., P. Lam and N. C. Mark (1994). Testing volatility restrictions on intertemporal marginal rates of substitution implied by Euler equations and asset returns. J. Finance 49, 123-152.
Chen, N. (1983). Some empirical tests of the theory of arbitrage pricing. J. Finance 38, 1393-1414.
Chen, Z. and P. Knez (1992). A measurement framework of arbitrage and market integration. Working Paper, University of Wisconsin.
Cochrane, J. H. (1996). A cross-sectional test of a production based asset pricing model. Working Paper, University of Chicago.
Cochrane, J. H. and L. P. Hansen (1992). Asset pricing explorations for macroeconomica. In: NBER Macroeconomics Annual 1992, O. J. Blanchard and S. Fischer, eds., Cambridge, Mass.: MIT Press.
Connor, G. (1984). A unified beta pricing theory. J. Econom Theory 34, 13-31.
Connor, G. and R. A. Korajczyk (1986). Performance measurement with the arbitrage pricing theory: A new framework for analysis. Jr. Financ. Econom. 15, 373-394.
Constantinides, G. M. (1982). Intertemporal asset pricing with heterogeneous consumers and without

demand aggregation. J. Business 55, 253-267.

Constantinides, G. M. (1990). Habit formation: A resolution of the equity premium puzzle. J. Politic. Econom. 98, 519-543.

Constantinides, G. M. and D. Duffie (1994). Asset pricing with heterogeneous consumers. Working Paper, University of Chicago and Stanford University.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, Jr. and S. A. Ross (1985). A theory of the term structure of interest rates. Econometrica 53, 385--407.

Debreu, G. (1959). Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium. New York: Wiley.

Detemple, J. B. and F. Zapatero (1991). Asset prices in an exchange economy with habit formation. Econometrics 59, 1633-1657.

Dunn, K. B. and K. J. Singleton (1986). Modeling the term structure of interest rates under non-separable utility and durability of goods. J. Financ. Econom. 17, 27-55.

Dybvig, P. H. and J. E. Ingersoll, Jr., (1982). Mean-variance theory in complete markets. J. Business 55, 233-251.

Eichenbaum, M. S., L. P. Hansen and K. J. Singleton (1988). A time series analysis of representative agent models of consumption and Leisure choice under uncertainty. Quart. J. Econom. 103, 51-78.

Epstein, L. G. and .S.E. Zin (1989). Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and asset returns: A theoretical framework. Econometrica 57, 937-969.

Epstein, L. G. and S. E. Zin (1991). Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and asset returns. J. Politic. Econom. 99, 263-286.

Evans, M. D. D. (1994). Expected returns, time-varying risk, and risk premia J.Finance 49, 655-479.

Fama, E. F. and K. R. French. (1992). The cross-section of expected stock returns. J. Finance 47, 427-465.

Fama, E. F. and J. D. MacBeth (1973). Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. J. Politic. Econom. 81, 607-636.

Ferson, W. E. (1983). Expectations of real interest rates and aggregate consumption: Empirical tests. J. Financ. Quant. Anal. 18, 477-497.

Ferson, W. E. and G. M. Constantinides (1991). Habit persistence and durability in aggregate consumption: Empirical tests. J. Financ. Econom. 29, 199-240.

Ferson, W. E. and S. R. Foerster (1994). Finite sample properties of the generalized method of moments tests of conditional ,asset pricing models. J. Financ. Econom. 36, 29-55.

Ferson, W. E. and S. R. Foerster (1995). Further results on the small-sample properties of the generalized method of moments: Tests of latent variable models. In: Res. Financ., Vol. 13. Greenwich, Conn.: JAI Press, pp. 91-114.

Ferson, W. E., S. R. Foerster and D. B. Keim (1993). General tests of latent variable models and mcan-variance spanning. J. Finance 48, 131-156.

Ferson, W. E. and C. R. Harvey (1991). The variation of economic risk premiums. J. Politic. Econom. 99, 385-415.

Ferson, W. E. and C. R. Harvey (1992). Seasonality and consumption-based asset pricing. J. Finance 47, 511-552.

Ferson, W. E. and R. A. Korajczyk (1995). Do arbitrage pricing models explain the predictability of stock returns? J. Business 68, 309--349.

Ferson, W. E. and J. J. Merrick, Jr. (1987). Non-stationarity and stage-of-the-business-cycle effects in

consumption-based asset pricing relations. J. Financ. Econom. 18, 127-146.
Gallant, R. (1987). Nonlinear Statistical Models. New York: Wiley.
Gibbons, M. R. and W. Ferson (1985). Testing asset pricing models with changing expectations and an unobservable market portfolio, J. Financ. Econom. 14, 217-236.
Gorman, W. M. (1953). Community preference fields. Econometrica 21, 63-80.
Hansen, L. P. (1982). Large sample properties of generalized method of moments estimators. Econometrica 50, 1029-1054.
Hansen, L. P., J. Heaton and E. G. J. Luttmer (1995). Econometric evaluation of asset pricing models. Rev. Financ. Stud. 8, 237-274.
Hansen, L. P. and R. Hodrick (1983). Risk averse speculation in the forward foreign exchange market: An econometric analysis of linear models. In: Exchange Rates and International Macroeconomics, J. A. Frenkel, ed., Chicago: University of Chicago Press.
Hansen, L. P. and R. Jagannathan (1991). Implications of security market data for models of dynamic economics. J. Politic. Econom. 99, 225-262.
Hansen, L. P. and R. Jagannathan (1994). Assessing specification errors in stochastic discount factor models. NBER Technical Working Paper No, 153.
Hansen, L. P. and S. F. Richard (1987). The role of conditioning information in deducing testable restriction implied by dynamic asset pricing models. Econometrica 55, 587-613.
Hansen, L. P. and K. J. Singleton (1982). Generalized instrumental variables estimation of nonlinear rational expectations models. Econometrica 50, 1269-1286.
Hansen, L. P. and K. J. Singleton (1983). Stochastic consumption, risk aversion, and the temporal behavior of asset returns. J. Politic. Econom. 91, 249-265.
Harrison, M. and D. Kreps (1979). Martingales and arbitrage in multi-period securities markets. J. Econom. Theory 20, 381-408.
Harvey, C. R. (1989). Time-varying conditional covariances in tests of asset pricing models. J. Financ. Econom. 24, 289--317.
Harvey, C. R. (1991). The world price of covariance risk. J. Finance 46, 111-157.
Heaton, J. (1995). An empirical investigation of asset pricing with temporally dependent preference specifications. Econometrica 63, 681-717.
Ibbotson Associates. (1992). Stocks, bonds, bills, and inflation. 1992 Yearbook. Chicago: Ibbotson Associates.
Jagannathan, R. (1985). An investigation of commodity futures prices using the consumption-based intertemporal capital asset pricing model. J. Finance 40, 175-191.
Jagannathan R. and Z. Wang (1993). The CAPM is alive and well. Federal Reserve Bank of Minneapolis Research Department Staff Report 165.
Jagannathan, R. and Z. Wang (1996). The conditional-CAPM and the cross-section of expected returns. J. Finance 51, 3-53.
Kandel, S. (1984). On the exclusion of assets from tests of the mean-variance efficiency of the market portfolio. J. Finance 39, 63-75.
Kandel, S. and R. F. Stambaugh (1987). On correlations and inferences about mean-variance efficiency. J. Financ. Econom. 18, 61-90.
Lehmann, B. N. and D. M. Modest (1987). Mutual fund performance Evaluation: A comparison of benchmarks and benchmark comparisons. J. Finance 42, 233-265.
Leroy, S. F. and K. D. Porter (1981). The present value relation: Tests based on implied variance

bounds. Econometrica 49, 555-574.
Lewbel, A. (1989). Exact aggregation and a representative consumer. Quart. J. Econom. 104, 621-633.
Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. Rev. Econom. Statist. 47, 13-37.
Lucas, R. E. Jr. (1978). Asset prices in an exchange economy. Econometrica 46, 1429-1445.
Luttmer, E. (1993). Asset pricing in economies with frictions. Working Paper, Northwestern University.
McElroy, M. B. and E. Burmeister (1988). Arbitrage pricing theory as a restricted nonlinear multivariate regression model. J. Business Econom. Statist. 6, 29-42.
MacKinlay, A. C. (1987). On multivariate tests of the CAPM. J. Financ. Econom. 18, 341-371.
MacKinlay, A. C. and M. P. Richardson (1991). Using generalized method of moments to test mean-variance efficiency. J. Finance 46, 511-527.
MaeKinlay, A. C. (1995). Multifactor models do not explain deviations from the CAPM. J. Financ. Econom. 38, 3-28.
Merton, R. C. (1973). An intertemporal capital asset pricing model. Econometrica 41, 867-887.
Merton, R. C. (1980). On estimating the expected return On the market: An exploratory investigation. J. Financ. Econom. 8, 323-361.
Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market. Econometrica 34, 768-783.
Newey, W. (1985). Generalized method of moments specification testing. J. Econometrics 29, 229-256.
Newey, W. K. and K. D. West (1987a). A sample, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. Econometrica 55, 703-708.
Newey, W. K. and K. D. West. (1987b). Hypothesis testing with efficient method of moments estimation. Internat. Econom. Rev. 28, 777-787.
Novales, A. (1992). Equilibrium interest-rate determination under adjustment costs. J. Econom. Dynamic Control 16, 1-25.
Roll, R. (1977). A critique of the asset pricing theory's tests: Part 1: On past and potential testability of the theory: J. Financ. Eeonom. 4, 129-176.
Ross, S. A. (1976). The arbitrage pricing theory of capital asset pricing. J. Econom, Theory 13, 341-360.
Ross, S. (1977). Risk, return and arbitrage. In: Risk and Return in Finance, I. Friend and J. L. Bicksler, eds. Cambridge, Mass.: Ballinger.
Rubinstein, M. (1974). An aggregation theorem for securities markets. J. Financ. Econom. 1, 225-244.
Rubinstein, M. (1976). The valuation of uncertain income streams and the pricing of options. Bell J. Econom. Mgmt. Sci. 7, 407-425.
Ryder H. E., Jr. and G. M. Heal (1973). Optimum growth with intertemporally dependent preferences. Rev. Econom. Stud. 40, 1-33.
Shanken, J. (1987). Multivariate proxies and asset pricing relations: Living with the roll critique. J. Financ. Econom. 18, 91-110.
Shanken, J. (1992). On the estimation of beta-pricing models. Rev. Financ. Stud. 5, 1-33.
Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. J. Finance 19, 425-442.
Sharpe, W. F. (1994). The Sharpe ratio. J. Port. Mgmt. 21, 49-58.
Shiller, R. J. (1979). The Volatility of long-term interest rates and expectations models of the term structure. J. Politic. Econom. 87, 1190-1219.
Shiller, R. J. (1981). Do stock prices move too much to be justified by subsequent changes in divi-

dends? Amer. Eeonom. Rev. 71, 421-436.

Singleton, K. J. (1980). Expectations models of the term structure and implied variance bounds. J. Politic. Econom. 88, 1159-1176.

Snow, K. N. (1991). Diagnosing asset pricing models using the distribution of asset returns. J. Finance 46, 955-983.

Stambaugh, R. F. (1982). On the exclusion of assets from tests of the two-parameter model: A sensitivity analysis. J. Financ. Econom. 10, 237-268.

Sundaresan, S. M. (1989). Intertemporally dependent preferences and the volatility of consumption and wealth. Rev. Financ. Stud. 2, 73-89.

Wheatley, S. (1988). Some tests of international equity integration. J. Financ. Econom. 21, 177-212.

Wheatley, S. M. (1989). A critique of latent variable tests of asset pricing models. J. Financ. Econom. 23, 325-338.

White, H. (1980). A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity. Econometrica 48, 817-838.

Wilson, R. (1968). The theory of syndicates. Econometrica 36, 119-132.