第 13 章 稳定分布的金融应用

J.Huston McCulloch

Life is a gamble , at terrible odds;
If it were a bet , you wouldn't take it.
Tom Stoppard , RosenKrantz and Guildenstern are Dead

1.引言

金融资产的收益是大量信息和个体决策连续不断地累积的结果。根据中心极限定理，如果大量独立同分布随机变量之和经过适当变换后具有极限分布，那么该极限分布就应当是一种*稳定*分布（Lévy 1937，Zolotarev 1986：6）。因此很自然地可以认为，如果资产收益具有可加性，那么资产收益就大致服从稳定分布，如果资产收益具有可乘性，那么资产收益就大致服从对数稳定分布。

正态分布是最常见和最易于处理的稳定分布，因此人们通常假定资产收益服从正态分布或者对数正态分布。然而，资产收益常常比正态分布具有更高的峰态。这自然使得人们也考虑采用非正态的稳定分布来拟合金融资产的收益，最早采用非正态稳定分布描述金融资产收益的是 Benoit Mandelbrot（1960，1961，1963a,b）。

如果资产收益确实服从无限方差稳定分布，现实生活相对于正态世界而言就会更具风险性。类似 1987 年股市崩盘的突然价格变化有可能再次出现，而期望通过“程序化交易”免除风险最多只是一种主观愿望。这些价格的不连续性使得著名的 Black-Scholes（1973）期权定价模型中的套利理论变得不适用了，因此有必要寻求其他的方法来对期权进行定价。

然而，我们应该看到资本资产定价模型在无限方差稳定分布中的效果和它在正态分布中的效果一样的好。此外，使用效用最大化理论，Black-Scholes 公式可以扩展到非正态稳定分布。已提出的两个重要的反对稳定假设的实证研究，也被证明是没有说服力的。

本文第 2 节考察了一元稳定分布、连续时间稳定过程和多元稳定分布的基本性质。第 3 节基于稳定分布重新考察了证券组合理论，并且将 CAPM 扩展到最一般的多元稳定分布情形。第 4 节应用不确定性对数稳定分布推导出了一个欧式期权定价公式，同时说明了该定价公式可以用于商品、股票、债券、外汇汇率等各种期权的定价。第 5 节讨论了稳定分布的参数估计问题，并考察了其在各种资产收益，包括外汇汇率、股票、商品和不动产中的实际运用。本文还讨论了已提出的反对稳定假设的实证研究，以及其它的一些尖峰态分布。

2.稳定分布的基本性质

2. 1. 一元稳定分布

稳定分布 $S(x;\alpha,\beta,c,\delta)$ 由四个参数所确定。*位置参数* $\delta\in(-\infty,\infty)$ 确定分布向左或向右的偏倚量，而*尺度参数* $c\in(0,\infty)$ 确定分布在 δ 周围集中或分散的程度，所以

$$S(x;\alpha,\beta,c,\delta)=S((x-\delta)/c;\alpha,\beta,1,0) \tag{1}$$

我们把*具有形状参数* α *和* β *的标准稳定分布函数*记为 $s_{\alpha\beta}(x)=s(x;\alpha,\beta,1,0)$，并且用

$s(x;\alpha,\beta,c,\delta)$ 和 $s_{\alpha\beta}(x)$ 表示相应的密度函数。如果 X 的分布是 $S(x;\alpha,\beta,c,\delta)$，记 $X \sim S(\alpha,\beta,c,\delta)$。

特征指数（characteristic exponent）$\alpha \in (0,2]$ 确定了尾部的形状以及分布的峰度。当 $\alpha = 2$ 时，代表的是方差为 $2c^2$ 的正态分布。当 $\alpha < 2$ 时，方差无穷大。当 $\alpha > 1$ 时，$\mathrm{E}X = \delta$，但如果 $\alpha \le 1$，均值则是不确定的。当 $\alpha = 1$，$\beta = 0$ 时，就是柯西（arctangent）分布。

Bergstrøm（1952）的展开式表明，当 $x \uparrow \infty$ 时，

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\beta}(-x) &\sim (1-\beta)\frac{\Gamma(\alpha)}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2}x^{-\alpha}, \\ 1-S_{\alpha,\beta}(x) &\sim (1+\beta)\frac{\Gamma(\alpha)}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2}x^{-\alpha}. \end{aligned} \tag{2}$$

当 $\alpha < 2$ 时，稳定分布会有一个或者多个“帕累托”尾，形状渐进于 $x^{-\alpha}$，同时稳定分布所有阶数大于或等于 α 的绝对总体矩都是无限的。在这种情况下，*偏斜参数* $\beta \in [-1,1]$ 表示两尾概率之差和两尾概率之和的极限比。这里沿用 Zolotarev（1957）对 β 的定义，即对任意的 α，$\beta > 0$ 表示分布具有正偏度。如果 $\beta = 0$，分布是对称稳定的（SS）。当 $\alpha \uparrow 2$ 时，β 将不起作用并且变得不可识别。

用对数特征函数定义稳定分布，形式最为简洁：

$$\log \mathrm{E} e^{iXt} = i\delta t + \Psi_{\alpha,\beta}(ct), \tag{3}$$

其中

$$\psi_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} -|t|^{\alpha}\left[1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \pi\alpha/2\right], & \alpha \ne 1, \\ -|t|\left[1 + i\beta \dfrac{2}{\pi} sign(t) log|t|\right], & \alpha = 1 \end{cases} \tag{4}$$

是 $S_{\alpha\beta}(x)$ 的对数特征函数[1]。稳定分布和密度既可以采用 Zolotarev（1986：74，68）的常义积分表达式进行计算，也可以用特征函数的傅立叶逆变换加以估计。DuMouchel（1971）把稳定分布制成表，而 Holt 和 Crow（1973）则把密度制成图表[2]。也可以参阅 Fama 和 Roll（1968）或者 Panton（1992）的类似成果。McCulloch（1994b）研究得出了当α ∈［0.84，

[1] (3)来自 DuMouchel(1973a)，隐含(1)和(5)。Samorodnitsky 和 Taqqu（1994）在 Zolotarev（1957）之后，运用(4)，给出一般对数特征函数，即 $\mathrm{i}\mu t + c^{\alpha}\psi_{\alpha\beta}(\mathrm{t})$。当α≠1 且μ＝δ时，这等价于(3)。然而当α＝1 时，μ变成δ-(2/π)βclogc。McCulloch（1986）错误地认为这个“μ”公式是(3)的性质。详细请参见 McCulloch（编印中 b)。

[2] Holt 和 Crow，在 Kolmogorov 和 Gnedenko 1949 年的工作成果之后，改变(4)当α≠1 时β的符号，从而得出虽遗憾但易于校正的结论，即除非α＝1，否则他们的“β”>0 意味着负偏度，反之亦然。比较 Hall（1981)。

2.00］时，迅速准确估计对称稳定分布和密度的方法。

当$\alpha > 2$或者$|\beta| > 1$的时候，$S_{\alpha\beta}(x)$的公式是可以计算的，但是此时得到的函数不是正常的概率分布函数，因为一个或者两个尾部将落在$[0,1]$之外，这可以从（2）中看出。因此，稳定分布包含$\alpha \in (0,2]$和$\beta \in [-1,1]$两个约束条件。

假设$X \sim S(\alpha,\beta,c,\delta)$，$a$是任一实常数，那么由（3）可得

$$aX \sim S(\alpha, \operatorname{sign}(a)\beta, |a|c, a\delta) \tag{5}$$

假设$X_1 \sim S(\alpha,\beta_1,c_1,\delta_1)$和$X_2 \sim S(\alpha,\beta_2,c_2,\delta_2)$是两个互相独立但有一共同参数$\alpha$的稳定分布。那么，$X_3 = X_1 + X_2 \sim S(\alpha,\beta_3,c_3,\delta_3)$，其中

$$c_3^\alpha = c_1^\alpha + c_2^\alpha, \tag{6}$$

$$\beta_3 = (\beta_1 c_1^\alpha + \beta_2 c_2^\alpha) / c_3^\alpha, \tag{7}$$

$$\delta_3 = \begin{cases} \delta_1 + \delta_2, & \alpha \neq 1 \\ \delta_1 + \delta_2 + \dfrac{2}{\pi}(\beta_3 c_3 \log c_3 - \beta_1 c_1 \log c_1 - \beta_2 c_2 \log c_2), & \alpha = 1 \end{cases} \tag{8}$$

当$\beta_1 = \beta_2$时，β_3就等于β_1和β_2，因此x_3有和x_1与x_2相同形状的分布。这就是稳定分布的“稳定性”，这直接导出它在 CLT 中的作用，也使得稳定分布在金融证券组合理论中有很大的用途。当$\beta_1 \neq \beta_2$时，则β_3的值落在β_1和β_2的值之间。

当$\alpha < 2$且$\beta > -1$时，帕累托上部长尾使得$\mathrm{E}e^X$变得无穷大。但是，当$X \sim S(\alpha,-1,c,\delta)$时，Zolotarev（1986：112）的研究表明

$$\log Ee^X = \begin{cases} \delta - c^\alpha \sec(\dfrac{\pi\alpha}{2}), & \alpha \neq 1 \\ \delta + \dfrac{2}{\pi} c \log c, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{9}$$

这一公式极大地简化了在不确定对数稳定分布情况下的资产定价。[3]

模拟随机变量的稳定分布可以根据一对独立均匀分布的伪随机变量直接计算，而不需使用 Chambers，Mallows 和 Stuck（1976）[4]提出的逆特征密度函数法。

[3] 作者感谢 Vladimir Zolotarev，他证明了通过再参数化，他的定理 2.6.1 等价于（9）。当α＝2，（9）就变成了熟悉的公式 $\log Ee^X = \mu + \sigma^2/2$。

[4] IMSL 的子程序 GGSTA，就是基于他们的方法，产生一个模拟稳定变量，认为当α≠1，BPRIME 等于β，c＝1 且ζ＝0，其中ζ＝δ＋βctan(πα/2)；当α＝1，ζ＝δ而不是δ＝0。参见 Zolotarev（1957：454，1987：11）和 McCulloch（1986：1121－26，编印中 b）都关注了这一变换。也可以参见 Panton（1989）

2.2.连续时间稳定过程

因为稳定分布是无限可分的，所以它们在连续时间建模中极具吸引力（Samuelson 1965:15-16；McCulloch 1978）。常用的布朗运动或者维纳过程可以一般化为“α稳定 lévy 运动（α－stable lévy motion）”，最近 Samorodnitsky 和 Taqqu（1994）、Janicki 和 Weron（1994）的两本专著即以这一运动为主题。在 Mandelbrot（1983）看来，这样的过程是一种自相似的*分形*分布（Fractal distribution）。在 Peters（1994）的术语中，一个*分形*分布就是稳定分布。

标准的α稳定 lévy 运动ξ(t)是一个连续时间随机过程，它的增量ξ(t+Δt)-ξ(t)服从分布$S(\alpha,\beta,\Delta t^{1/\alpha},0)$（当α≠1）或者$S(1,\beta,\Delta t,(2/\pi)\beta\Delta t\log\Delta t)$（当α＝1），而且，它的非重叠增量都是独立的。这一过程的无穷小增量是 dξ(t)= ξ(t+dt)－ξ(t)，尺度为$dt^{1/\alpha}$。这一过程本身可以用这些增量的积分重写成：

$$\xi(t)=\xi(0)+\int_0^t d\xi(t)$$

我们可以定义更为一般的随机过程 z（t）＝c_0ξ(t)+δ_t，它在单位时间间隔的增量比标准稳定运动扩大了 c_0 倍，当α≠1 时，每单位时间的飘移是δ。

和几乎必定（almost surely ）处处连续的布朗运动不同的是，α稳定 lévy 运动是几乎必定处处存在间断。将（2）用于$S(\alpha,\beta,c_{dt},0)$（参见 McCulloch 1978 中的特征函数方程（18）-（19）），则 dz>x 的概率为

$$k_{\alpha\beta}\left(\frac{x}{c_{dt}}\right)^{-\alpha}=k_{\alpha\beta}c_0^{\alpha}x^{-\alpha}dt\text{，其中} \tag{10}$$

$$k_{\alpha\beta}=(1+\beta)\frac{\Gamma(\alpha)}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2} \tag{11}$$

因此（10）表明 dz 的值大于某一临界值 x_0>0 的概率为

$$\lambda=k_{\alpha\beta}(c_0/x_0)^{\alpha}, \tag{12}$$

而且它们的发生是有条件的，它们服从帕累托分布：

$$\text{P}（dz<x|dz>x_0）=1-(x_0/x)^{\alpha},x>x_0 \tag{13}$$

同样，*负的*间断 dz<-x_0 也服从条件帕累托分布，其发生的概率由（12）确定，只是式中的$k_{\alpha\beta}$用$k_{\alpha,-\beta}$代替。当α＝2，$k_{\alpha\beta}$＝0，间断几乎必定不会发生。当α<2 时，绝对值大于 x_0 的间断的频数将随着 $x_0\downarrow 0$ 而趋于无限大。如果β＝±1，间断几乎必定只在单帕累托尾的方向发生。

因为Δt↓0 时，Δξ也趋于 0，α稳定 lévy 运动是处处几乎必定连续的，尽管它并不是几乎必定处处连续。换句话说，每一个时点 t 几乎必定是一个连续点，在任一有限区间，几乎必定有无穷多个点不是这样。尽管它们是几乎必定稠密，间断点几乎必定只构成一个零测集(a set of measure zero)，因此，任一随机抽取的点以概率 1 为连续点。这样的一个连续点几乎必定是间断点的极限点，只是这些间断点的跳跃随着它们的趋向极限而趋于零。

提供的有关 CMS 论文计算的详细过程。

Δξ/Δt 的量度是$(\Delta t)^{(1/\alpha)-1}$，所以当α>1 时，ξ(t)是处处几乎必定不可微的，就象布朗运动的情形一样。当α<1 时，ξ(t)也 是处处几乎必定可微的，虽然有无穷多个点（间断点）不是这样。

α稳定 lévy 运动的间断点意味着偶尔底价会以快于市场交易执行的速度下跌，这种情况已经发生过，而其中最引人注目的就是 1987 年 10 月。当这种事件发生的概率为正时，想通过“程序化交易”免除证券组合风险最多仅仅是一种主观愿望。此外，在上述情形下，Black-Scholes 模型（1973）的套利理论将不再适用于期权定价，而且，期权也不再像标的资产价格连续的情形那样，是一种多余的资产形式。

2.3. 多元稳定分布

一般而言，多元稳定分布比多元正态分布要丰富得多。这不仅因为当α<2 时，“独立同分布”和“球面”并不等价，而且也因为多元稳定分布不像多元正态分布那样，通常可以用一个简单的协方差矩阵完全刻画特征。如果 x_1 和 x_2 是独立同稳定分布，且α<2，那么它们的联合分布将*不具*有圆形的密度等高线。靠近分布中心的等高线近似于圆形，但离开分布中心时，等高线在轴的方向将有暴涨部分（Mandelbrot 1963b：403）。

假设 z 是独立同分布稳定随机变量的$m\times 1$向量，它的每一元素都服从$S(\alpha,1,1,0)$分布，又假设$A=(a_{ij})$是秩为$d\le m$的$d\times m$的矩阵。于是$d\times 1$的向量$x=Az$就服从 d 维多元稳定分布，它的*元素*和 A 中的每一列a_j具有相同的方向。如果这些列中有任意两列有相同的方向，即存在λ>0 使得 $a_2=\lambda a_1$，就可以根据（5）和（6）不失一般性地将它们合并成一列$(1+\lambda^{\alpha})^{1/\alpha}a_1$。每一元素将在$a_j$方向的联合密度上产生一个凸点。如果这些列两两成对，方向相反但范数相同，x 就是对称稳定的。

（离散）*谱表示法：*记a_j为$c_j s_j$，其中$c_j=\|a_j\|$和$s_j=a_j/c_j$是a_j方向单位球面$S_d\subset R^d$上的点。于是 x 可以写成

$$x=\sum_{j=1}^{m}c_j s_j z_j\ ,\tag{14}$$

而且当α≠1 时候，对数特征函数为

$$\log Ee^{x't}=\sum_{j=1}^{m}\gamma_j\psi_{\alpha 1}(s_j' t),\tag{15}$$

其中$\gamma_j=c_j^{\alpha}$。[5]

最一般的多元稳定分布可以是由所有可能方向的基值（Contribution）产生的，（14）中一些甚至全部的c_j都可以是极小量。将位置特征加以抽象化，对数特征函数可以写成

[5] 因为当α＝1，β≠0 时，（3）中的δ不具有可加性（参见(8)），因此本节的公式在此特殊情形下需要修正。

$$\log \mathrm{E} e^{ix't} = \int_{S_d} \psi_{\alpha 1}(s't)\Gamma(ds), \tag{16}$$

其中Γ是定义在 Borel 子集 S_d 上的有限谱测度（a finite spetral measure）。

当 d＝2 时，（16）可以简化为

$$\log \mathrm{E} e^{ix't} = \int_0^{2\pi} \psi_{\alpha 1}(s_\theta' t) d\Gamma(\theta), \tag{17}$$

其中 $s_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)'$ 是单位圆上角度为θ的点，而Γ是非减、左连续函数，且 $\Gamma(0) = 0$，$\Gamma(2\pi) < \infty$。（参见 Hardin,Samorodnitsky 和 Taqqu 1991：585；Mittnik 和 Rachev 1993b：355－56；Wu 和 Cambanis 1991：86。）

随机向量 $x = (x_1, x_2)'$ 可以由极大正偏斜(positive skewed)（β＝1）α稳定 lévy 运动 $\xi(\theta)$ 来构造，它的独立同分布增量 $d\xi(\theta)$ 具有零漂移，尺度为 $(d\theta)^{1/\alpha}$，构造公式如下：

$$x = \int_0^{2\pi} s_\theta \frac{(d\Gamma(\theta))^{1/\alpha} d\xi(\theta)}{(d\theta)^{1/\alpha}}, \tag{18}$$

（参见 Modarres 和 Molan 1994）。这个被积函数解释如下：如果 $\Gamma'(\theta)$ 存在，θ对积分的贡献是 $s_\theta (\Gamma'(\theta))^{1/\alpha} d\xi(\theta)$；反之，如果Γ在θ上跳跃ΔΓ，θ的贡献是 $s_\theta (\Delta\Gamma)^{1/\alpha} Z_\theta$，其中对所有的 $\theta' \neq \theta$ 而言，$Z_\theta = (d\theta)^{-1/\alpha} d\xi(\theta) \sim S(\alpha,1,1,0)$ 和 $d\xi(\theta')$ 相互独立。

如果 x 服从这样的二元稳定分布，而且 $a = (a_1, a_2)'$ 是一个常数向量，那么

$$a'x = \int_0^{2\pi} (a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta) \frac{(d\Gamma(\theta))^{1/\alpha} d\xi(\theta)}{(d\theta)^{1/\alpha}} \tag{19}$$

服从一元稳定分布。根据（5）和（6），$a'x$ 的尺度由下式确定

$$c^\alpha(a'x) = \int_0^{2\pi} |a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta|^\alpha d\Gamma(\theta) \tag{20}$$

M．Kanter（据 Hardin 等 1991 的报告）在 1972 年证明，如果 $d\Gamma$ 是对称的而且α>1，则

$$E(x_2 | x_1) = \kappa_{2,1} x_1, \tag{21}$$

其中，假定 $x^{\langle\alpha\rangle} = \mathrm{sign}(x)|x|^a$，

$$\kappa_{2,1} = \frac{1}{c^\alpha(x_1)} \int_0^{2\pi} \sin\theta (\cos\theta)^{\langle\alpha-1\rangle} d\Gamma(\theta), \tag{22}$$

$$c^\alpha(x_1) = \int_0^{2\pi} |\cos\theta|^\alpha d\Gamma(\theta) \tag{23}$$

（22）中的积分被称为 *x_2 在 x_1 上的协变*（covariation）。Hardin 等（1991）证明了如果 $d\Gamma$ 是

不对称的，$E(x_2|x_1)$对 x_1 来说是非线性的，但仍然是一个包含$\kappa_{2,1}$的简单函数。他们指出在α<1 的对称情形下（21）也是正确的。

如果$d\Gamma$，从而 x 的分布是对称的，(16）和（17）中的$\psi_{\alpha1}(s't)$可以由$\psi_{\alpha0}(s't)=-|s't|^{\alpha}$替代，而（18）中的$d\xi(\theta)$也就是对称的。在这种情况下，假定Γ加倍，对 S_d 的任何一半积分，就可以得到原积分值。

多元稳定分布的一个重要特例是 Press（1982：158，172－3）[6]中强调的*椭圆类*。如果（16）中的$d\Gamma(s)$完全等于一个常数乘以ds，那么各个方向对 x 的贡献都将是一样的。这样一种分布，在经过适当缩放以使得每一分量的边际分布具有所要求的尺度后，分布将具有球面对称联合密度$f(x)=\phi_{ad}(r)$，其中$\phi_{ad}(r)$仅由$r=\|x\|$，α以及 x 的维数 d 所决定。这种分布的对数特征函数应与$\psi_{\alpha0}(\|t\|)=-(t't)^{\alpha/2}$成比例。这样的球面稳定分布也称为*各向同性（isotropic）分布*。

Press 倾向于按照标准球面正态分布的方式为球面多元稳定分布选择尺度因子，以使得各分量的方差是一致的。将（3）中的 c 用$\sigma/2^{1/\alpha}$代替可以得到它对应的一元分布。这样，正规化度比例σ就等于$2^{1/\alpha}c$，也等于当α＝2 时的标准差。[7]相应地，Press 定义所谓的*标准正规化球面稳定分布*的对数特征函数为

$$\log Ee^{ix't}=\psi_{\alpha0}(\|t\|)/2=-(t't)^{\alpha/2}/2 \qquad (24)$$

当（17）和（18）中的 d＝2 时，由（23），dΓ的必要常数是

$$d\Gamma(\theta)=\left(2\int_0^{2\pi}|\cos\omega|^{\alpha}d\omega\right)^{-1}d\theta$$

如果 z 服从 d 维的球面稳定分布，且$x=Hz$，其中 H 是 d×d 非奇异矩阵，那么 x 服从 *d 维（正规化）椭圆稳定分布*，它的对数特征函数为

$$\log E\exp(ix't)=-\left(t'\sum t\right)^{\alpha/2}/2 \qquad (25)$$

而联合密度函数为

$$f(x)=\left|\sum\right|^{-1/2}\phi_{\alpha d}\left(\left(x'\sum{}^{-1}x\right)^{1/2}\right), \qquad (26)$$

其中$\sum=(\sigma_{ij})=HH'$。x 的分量 x_i 的正规化尺度为$\sigma(x_i)=\sigma_{ii}^{1/2}=2^{1/\alpha}c(x_i)$。这里的Σ很象多元正态分布协方差矩阵，当α＝2 时也就是协方差矩阵。当α>1 时，$E(x_i|x_j)$存在并且

[6] 这里给出的特例是 Press 的“阶 m”＝1。他的高阶例子（m >1）就没那么有用。在 1972 年，Press 声称这些都是最普通的多元对称稳定分布，但在（1982：158）他承认这不是事实。

[7] Ledoux 和 Talagrand（1991：123）有效地在一元情况下使用了这种替代。在这里，除了多元椭圆情形，仍然沿用传统的参数化方法。

等于$\left(\sigma_{ij}/\sigma_{jj}\right)x_j$[8]。如果Σ是对角矩阵，x的各个分量之间就是不相关的，因为$E\left(x_i\middle|x_j\right)=0$，但是它们并*不*独立，除非α=2。

分布为$S(\alpha,0,c,0)$的对称稳定随机变量 C 可以由乘积$BA^{2/\alpha}$得到，这里 A 服从分布$S(\alpha/2,1,c^*,0)$，B服从分布$S(2,0,c,0)$，其中$c^*=\left(\cos(\pi\alpha/4)\right)^{2/\alpha}$（Samorodnitsky和Taqqu 1994：20-21）。而且，如果B是一个球面分布的d维向量，其分量服从分布$S(2,0,c,0)$，那么 C 也是一个球面分布的 d 维向量，它的分量服从边际分布$S(a,0,c,0)$。令$P(\|C\|<r)=P(\|B\|A^{2/\alpha}<r)$，那么就意味着密度生成函数可以从最大偏斜的一元稳定密度函数中计算得出（参见McCulloch和Panton，编印中），即

$$\phi_{\alpha d}(r)=\frac{\alpha}{2c^*\left(4\pi c^2\right)^{d/2}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{4c^2x^2}\right)x^{\alpha/2-1}s_{\alpha/2,1}\left(x^{\alpha/2}/c^*\right)dx \tag{27}$$

其中$c=2^{-1/\alpha}$为Press正规化。（参见Zolotarev（1981））

3.稳定证券组合理论

Tobin（1958）认为如果所有考察的分布都用两个参数加以表示的话，对财富w概率分布的偏好可以表示成这两个参数的间接效用函数。他进一步论证了如果效用U（w）是财富的凹函数而且这两参数组是仿射（affine）的，也就是像稳定分布的δ和c一样用位置参数和尺度参数来表示，那么期望效用最大化形成的间接效用函数V（δ，c）是准凹函数，而风险资产和无风险资产的投资组合形成的机会组合就是直线。而且，如果这样的两参数仿射组相加后是闭合的，用同一准凹的间接效用函数得到的凸资产组合就将是可公度的（commensurate）。如果他们是对称的，甚至是非凸投资组合，通过一些资产的卖空，也可以这样加以比较。正态分布和所有稳定分布一样当然具有这种闭合性质（Samuelson 1967）。[9]

Fama 和 Miller（1972：259－74，313－319）研究表明，将传统的资本资产定价模型（CAPM）的结论用于特殊的一组多元对称稳定分布，其中资产 i 的相对算术收益$R_i=\left(\mathrm{P}_i(t+1)-P_i(t)\right)/P_i(i)$由“市场模型”生成：

$$R_i=a_i+b_iM+\varepsilon_i\,, \tag{28}$$

其中a_i和b_i是与特定资产相关的常数，$M\sim S(\alpha,0,1,0)$是影响所有资产的市场因素，而$\varepsilon_i\sim S(\alpha,0,c_i,0)$是与特定资产相关的扰动项，它独立于M，而且各资产的之间的扰动项也

[8] Wu和Cambanis（1991）证明了在这种情况下var（$x_i|x_j$）确实存在。

[9] Owen 和Rabinovitch（1983）研究表明一般的*椭圆*分布也具有这一性质。然而，除椭圆稳定分布以外，它们不能产生于独立同分布冲击（shocks）的累积，也没有使人非相信不可的合理性。

相互独立。

在（28）的基础上，N 种资产的收益 $R=\left(R_1,\ldots R_{\mathrm{N}}\right)'$ 有 N＋1 个如同（14）的多元对称稳定分布的元素，即

$$R=a+\begin{pmatrix} b & I_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \tag{29}$$

其中 $a=\left(a_1,\ldots,a_{\mathrm{N}}\right)'$。这一分布有关于每一轴线都对称的 N 个元素，且有第 N＋1 个元素延伸至正卦限（positive orthant)。

FM 的研究表明当 $\alpha>1$ 时，如同正态分布情形一样，多样化仍然会减少特定公司风险的影响，尽管速度会更慢些。他们注意到如果将这种资产的两个不同组合以 x 和（1－x）的比例进行混合，这一混合的资产组合的尺度将是 x 严格意义上的凸函数，而且也是平均收益（假设两个组合有不同的平均收益）严格意义上的凸函数。对于有效组合来说，因为平均数是尺度的递增函数，与正态分布情形一样，最大化的平均收益将会是方差的凹函数。给定间接效用函数的 Tobin 准凹度，有效边界和间接效用无差别曲线之间的切点表示了个人投资者的期望效用的全局最大值点。

当在交易中引入一种无风险、实际收益为 R_f 的虚构资产（artificial asset)，所有代理人都将会象在正态分布情形中那样，选择多头或者空头的无风险资产和市场投资组合进行混合。假设 $\theta=\left(\theta_1,\ldots\theta_{\mathrm{N}}\right)'$ 代表在市场投资组合中 N 种资产的份额，则市场收益可以表示为，

$$R_m=\theta' R=a_m+b_m M+\varepsilon_m\ , \tag{30}$$

其中 $a_m=\theta' a$，$b_m=\theta' b$，$\varepsilon_m=\theta'\varepsilon$。于是，$\left(\mathrm{R}_m,\ \mathrm{R}_{\mathrm{i}}\right)'$ 就服从三元素的二元对称稳定分布，即

$$\begin{pmatrix} R_m \\ R_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_m & 1 & \theta_i \\ b_i & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M \\ \varepsilon_{\hat{i}} \\ \varepsilon_i \end{pmatrix}, \tag{31}$$

其中 $\varepsilon_{\hat{i}}=\varepsilon_m-\theta_i\varepsilon_i$。$\mathrm{R_m}$ 的波动率由下式给出

$$c^\alpha\left(R_m\right)=b_m^\alpha+c^\alpha\left(\varepsilon_m\right), \tag{32}$$

其中 $c^\alpha\left(\varepsilon_m\right)=\sum\theta_i^\alpha c_i^\alpha$ 代表特定公司风险对市场投资组合风险的贡献。

传统的 CAPM 预测 N 种资产的价格，以及它们的平均收益 a_{i} 以这样的一种方式由市场决定：

$$ER_i-R_f=\left(ER_m-R_f\right)\beta_{CAPM}\ , \tag{33}$$

其中 CAPM 的“β”（不要和稳定的“β” 分布相混淆）通常这样计算

$$\beta_{CAPM}=\operatorname{cov}\left(R_i,R_m\right)/\operatorname{var}\left(R_m\right) \tag{34}$$

当α<2 时，方差和协方差都为无穷大。然而，FM 指出市场均衡条件事实上只要求 a）市场投资组合是有效的投资组合，在给定平均收益的情况下使其*方差*最小，以及 b）在（E(R)，c(R)）空间，市场有效组合的斜率等于$\left(ER_m - R_f\right)/c\left(R_m\right)$。他们指出这依次表明了（33）成立，其中

$$\beta_{CAPM} = \frac{1}{c\left(R_m\right)}\frac{\partial c\left(R_m\right)}{\partial \theta_i} \tag{35}$$

在有限方差的情况下，从（35）可以推出（34），但事实上方差和协方差已经无关紧要。

在（28）的市场模型中，FM 证明（35）为[10]

$$\beta_{CAPM} = \frac{b_i b_m^{\alpha-1} + \theta_i^{\alpha-1} c_i^{\alpha}}{c^{\alpha}\left(R_m\right)} \tag{36}$$

当$\theta_i \downarrow 0, c\left(R_m\right) \downarrow b_m$，因此$\beta_{CAPM} \to b_i / b_m$。除了建议（269 页）在（28）中增加特定行业因素之外，FM 没有对一般多元稳定分布做进一步的研究。

Press（1982：379-81）论证了椭圆多元稳定分布的投资组合分析甚至比 FM 的多元素模型更简单。假设 R-ER 服从对数特征函数如（25）的标准椭圆稳定分布，Σ为 N×N 的协方差矩阵。那么$\left(R_m, R_i\right)'$的 2×2 的协方差矩阵Σ^*为

$$\sum{}^{*} = \begin{pmatrix} \sigma_m^2 & \sigma_{im} \\ \sigma_{im} & \sigma_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta' \\ e_i' \end{pmatrix} \sum \begin{pmatrix} \theta & e_i \end{pmatrix} \tag{37}$$

其中e_i是第 i 个元素为 1 的 N 维单位向量。很容易看出（35）隐含了

$$\beta_{CAPM} = \sigma_{im} / \sigma_m^2 \tag{38}$$

Fama 和 Miller 或者 Press 都没有对一般的对称多元稳定分布进行研究，在此情形下，$x = \left(R_m - ER_m,\ R_i - ER_i\right)'$会服从形同（17）的二元对称稳定分布。这样，可以容易看出 Fama-Miller 的（35）意味着

$$\beta_{CAPM} = \kappa_{im}, \tag{39}$$

其中$\kappa_{im} = E\left(R_i - ER_i \middle| R_m - ER_m\right)/\left(R_m - ER_m\right)$与上面给出的 Kanter（22）相同。这个一般稳定分布的 CAPM 的公式最先是 Camrowski 和 Rachev（1994，1995）提出的。

因此，$\alpha < 2$的可能性并没有给传统的 CAPM 增加新的困难。但是，它*原有*的问题依然存在。第一个问题是它假设在一个时点仅消费*单一种*消费品。如果存在具有可变相对价格的几种商品，或者存在非常数的实际利率结构上的几个时间点，那么对不同消费风险类型有不同的 CAPM 的β。

CAPM 的第二个问题是如果*算术*收益服从$\alpha > 1$和$c > 0$的稳定分布，任何一个股票价格、乃至整个消费量为负的概率就会大于 0。在这种情况下 Zimeba（1974）考虑了可以使期望效用和期望边际效用有限的效用函数的约束条件。假定自由支配和有限负债，不考虑负

[10] 这直接来自于他们的（7.51），那里考虑的“有效投资组合”是市场投资组合。

消费产生的困局，非负分布更为理想。另一个复杂之处是，假设相对的、而不是绝对的算术收益在不同时间上具有同方差性会更加合理些。然而，如果相对的单期算术收益服从任意独立分布，那么经过多个时期它们将是乘法累积的，而不是保持一个稳定分布所要求的加法累积。

假定资产价格非负，那么服从正态或稳定分布的资产收益的对数值 $\log\left(P_i\left(t+1\right)/P_i\left(t\right)\right)$ 可以很容易地由收益的乘法累积产生。然而，对数正态或者对数稳定分布不再是*仿射*两参数分布，因而 Tobin 关于间接效用函数的准凹性的论述也不再成立。此外，对个股而言，单期收益在加法下的稳定分布的闭合性质意味着在*乘法*下对数正态和对数稳定分布也是闭合的，但是，这并不意味着资产组合中的个股收益的*累加*也是闭合的。因此，对数正态或者对数稳定分布的股票的组合不一定再是同一类分布了。其结果是，不管效用函数准凹与否，这样的组合依照两参数间接效用函数可能无法精确公度（commensurate）。

令人信服的是，两个随机变量的联合分布的边际分布可能是对数稳定的，它们的线性组合的等高线可能会有些变形，因为这个*线性*组合不再是对数稳定的了。然而，Boris Mityagin（在 McCulloch 和 Mityagin 的论文中 1991）已经证明了如果*对数*稳定边际分布具有有限均值，即，α＝2 或β＝－1，情况就不是这样了。这一结论也使得无限均值的情形会具有理想性质变得几乎不可能。

由于集中于连续时间维纳过程，正态分布情形避免了后面的问题，因为对数正态假设可以将负收益排除，但瞬时对数和相对算术收益的区别仅在于 ITO 定理所确定的漂移项。然而，当α<2 时，连续时间稳定过程中的不连续性使得甚至是瞬时对数和相对算术收益的表现也出现了根本不同。

因此，稳定的 CAPM，和正态的 CAPM 一样，最多仅仅是提供风险资产均衡定价的一个近似值。毕竟，没有任何理论可以保证资产定价会像最开始寻求两参数资产定价模型时设想的那样简单和精确。

4.对数稳定期权定价[11]

*期权*是一种衍生金融工具，它赋予持有者这样一种权利，但不是义务，即在特定时间内以合约价格——称为协定价格或者执行价格——买入或者卖出特定数量的标的资产。有权买入资产的期权称为*看涨*期权，而有权卖出资产的期权称为*看跌*期权。仅允许在期权到期日履行合约的期权称为*欧式*期权，而允许在期权到期日之前任何一天均可履行合约的期权称为*美式*期权。在实践中，大部分期权都是美式期权，但是欧式期权比较容易估价，而且在某些情况下两者具有相等的价值。

Black 和 Scholes（BS；1973）发表了用套利理论论证得到的股票欧式期权的精确定价公式，他们假定在期权有效期内股票价格几乎必定处处连续，到期期限的价格变化服从对数正态分布。Merton（1976）注意到极度实值期权、极度虚值期权和临近到期期权倾向于以高于 BS 预测价值的价格出售。此外，如果 BS 公式是基于真实分布的话，利用具有不同执行价格的同种期权的同期价格计算出来的隐含波动率对于执行价格是常数。实际上，隐含波动率曲线常常在末端向上弯曲，形成所谓的*波动率微笑*（volatility smile）（Bates 1996）。这意味着，市场至少认为大幅价格运动相对小幅价格运动的概率要更大些，这与 BS 公式的对数正态假设是相一致的。

BS 模型的推理方法不能适用于对数稳定分布的情形，因为α稳定 lévy 运动的时间过程

[11] 本节大量引自 McCulloch（1985b）所作的补充。

中存在间断点。[12]此外，如果股票价格是对数稳定的，当$\alpha < 2$且$\beta > -1$时，那么看涨期权的期望收益就是无穷大。这使得 Paul Samuelson（Smith 1976：19 引用）“倾向于相信[Robert]Merton 的猜想，即 log（S^*/S）的严格利维-帕累托[稳定]分布，当 1<α<2，会导致 5 分钟认股权证或者看涨期权和普通股的价值相等。”Merton 更进一步推测（1976：127n），为了使得当前股票的价格是有限的，某一股票的无穷大的未来期望价格必须要求无风险贴现率也是无穷大的。

我们下面将说明，即使在α<1 的极端情形下，这些使人困惑的问题也不会出现。此外，广义对数稳定不确定性分布条件下欧式期权的价值可以通过基本的期望效用最大化原则加以估价，而无需用到 BS 套利理论，或者甚至是风险中性理论。

4.1. 即期和远期资产价格

假设存在 A_1 和 A_2 两种资产，能代表它们的家庭效用函数为 U（A_1，A_2），边际效用为 U_1 和 U_2。令

$$S_T = U_2 / U_1 \tag{40}$$

是用 A_1 表示的在未来时间 T 资产 A_2 的随机即期价格。如果 $\log U_1$ 和 $\log U_2$ 都是稳定的，具有共同的特征指数，那么 $\log S_T$ 也是有相同特征指数的稳定分布。从上下文中可以明显判断“S”是代表证券的即期价格（通常在期权定价的文献中），或者是代表稳定的特征分布函数。

假设 F 是合约在当前时点 0 的市场远期价格，这一合约是关于在时间 T 无条件支付 F 单位的 A_1，可以得到一单位的 A_2。拥有ε份合约的期望效用为 EU（A_1－εF，A_2＋ε）。最大化并施加均衡条件ε＝0 得到

$$F = \mathrm{E}U_2 / \mathrm{E}U_1 \tag{41}$$

（41）两个期望值都是基于当前（时点 0）信息。

当 $\log U_i$ 服从α<2 的稳定分布时，为了使 $\mathrm{E}U_i$ 是有限的，由（9）可知，$\log U_i$ 必须是极大负偏斜，也即，β＝－1。为了对对数稳定期权进行估价，目前没有别的替代方法只能做这样的假设。然而，这一约束并没有限制 $\log S_T$ 服从中度偏斜稳定分布，或者甚至服从对称稳定分布，因为 $\log S_T$ 可以有来自 U_2 的上帕累托尾和来自 U_1 的下帕累托尾，以及由（7）确定的中度偏斜。

假设$u_1 \sim S(\alpha, +1, c_1, \delta_1)$以及$u_2 \sim S(\alpha, +1, c_2, \delta_2)$是独立的与资产相关的特定的最大*正*偏斜稳定变量，各自对 $\log U_1$ 和 $\log U_2$ 起*负*作用。不失一般性，假设$u_3 \sim S(\alpha, +1, c_3, \delta_3)$是共同的分量，对 $\log U_1$ 和 $\log U_2$ 起着相同的负作用，并且和 u_1 和 u_2 相独立，所以

$$\log U_1 = -u_1 - u_3 , \tag{42}$$

$$\log U_2 = -u_2 - u_3 \tag{43}$$

[12] Rachev 和 Samorodnitsky（1993）尝试对一个对数对称稳定期权进行定价，他们使用套期保值理论考虑标的资产的α稳定 lévy 运动跳跃点的*方向*，但没有考虑他们的*大小*。此外，他们的套期率被当成仍然没有*观测到*大小的跳跃的函数。这些不足之处使得他们的公式即使不考虑计算的困难程度也远远不能令人满意，Jones（1984）计算了复合跳跃/扩散过程的期权价值，因为跳跃，这一过程具有无限方差，但它并不是稳定或者对数稳定分布。

假设(α,β,c,δ)是下式的参数

$$\log \mathrm{S}_T = u_1 - u_2 \tag{44}$$

我们假设α，β，c 和 F 已知，而δ，c_1，c_2，c_3，δ_1，δ_2和δ_3不可直接观测。由（5）—（8），得到，

$$\delta = \delta_1 - \delta_2,\quad \alpha \neq 1, \tag{45}$$

$$c^\alpha = c_1^\alpha + c_2^\alpha, \tag{46}$$

$$\beta c^\alpha = c_1^\alpha - c_2^\alpha \tag{47}$$

在这里假设α≠1，后面再讨论α＝1 的情形。

由方程（46）和（47）可以解出

$$\begin{aligned} c_1 &= \left((1+\beta)/2\right)^{1/\alpha} c, \\ c_2 &= \left((1-\beta)/2\right)^{1/\alpha} c. \end{aligned} \tag{48}$$

使用 Zolotarev 的公式（9）并设$\theta = \pi\alpha/2$，得到

$$EU_i = e^{-\delta_i - \delta_3 - \left(c_i^\alpha + c_3^\alpha\right)\sec\theta},\quad i = 1,2, \tag{49}$$

因此（41）给出

$$\mathrm{F} = e^{\delta_1 - \delta_2 + \left(c_1^\alpha - c_2^\alpha\right)\sec\theta} = e^{\delta + \beta c^\alpha \sec\theta} \tag{50}$$

如果β＝0（因为 c_1＝c_2），（50）意味着 logF＝ElogS_T。这一特例并不要求对数效用函数，仅要求 U_1和 U_2对 S_T的不确定性起相同的作用。

4.2. 期权定价

假设 C 是一个欧式看涨期权的价值，即在 0 时刻无条件地交付 C 单位 A_1，可以获得在 T 时刻以执行价格（行使价格）X 购买一单位的资产 A_2的权利。r_1是到期日为 T、面值为 A_1贷款的无违约风险利率。这样，在 0 时刻 C 单位的 A_1就边际地等价于 T 时刻的$C\exp(r_1 T)$单位。

如果 T 时刻的$S_T > X$，期权将被执行，期权持有者以 X 单位的 A_1换取一单位的 A_2。如果$S_T \le X$，期权将不被执行。在任一情况下，期权持有者都将为期权支付包含利息在内总共$C\exp(r_1 T)$单位的 A_1的费用。为使得持有该期权少量头寸的预期效用的增益等于零，可以得到

$$\int_{S_T > X} \left(U_2 - XU_1\right) dP\left(U_1, U_2\right) - Ce^{r_1 T} \int_{all S_T} U_1 dP\left(U_1, U_2\right) = 0 \tag{51}$$

或者，使用（41），

$$C = e^{-r_1 T}\left[\frac{F}{EU_2}\int_{S_T > X} U_2 dP\left(U_1, U_2\right) - \frac{X}{EU_1}\int_{S_T > X} U_1 dP\left(U_1, U_2\right)\right] \tag{52}$$

在上面的公式中，$P(U_1,U_2)$是U_1和U_2的联合概率分布。（52）对存在期望的任何联合分布都是适用的。

附录中证明了$\alpha \neq 1$的稳定模型，（52）可化为

$$C = Fe^{-r_1T+c_2^\alpha \sec\theta} I_1 - Xe^{-r_1T+c_1^\alpha \sec\theta} I_2\,, \tag{53}$$

其中，令$S_{\alpha1}^c = 1 - S_{\alpha1}$，有

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_2 z} s_{\alpha1}(z) S_{\alpha1}^c\left(\left(c_2 z + \log\frac{X}{F} + \beta c^\alpha \sec\theta\right)/c_1\right)dz\,, \tag{54}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_1 z} s_{\alpha1}(z) S_{\alpha1}\left(\left(c_1 z - \log\frac{X}{F} - \beta c^\alpha \sec\theta\right)/c_2\right)dz \tag{55}$$

（53)有效地将 C 表示成函数$C(X,F,\alpha,\beta,c,r_1,T)$，其中 C_1 和 C_2 由(48)确定，$\theta = \pi\alpha/2$。应注意的是，（53）没有直接用到δ，但从（50）可以看出δ包含在 F 中。不确定的共同分量u_3完全被排除在外。

Rubinstein（1976）证明当$\log U_1$和$\log U_2$服从一般二元正态分布时，由（52）可以推导出 Black-Scholes 公式。而（53）将 Black-Scholes 公式推广到$\alpha < 2$的情况。

如果远期价格 F 无法直接观测，但已知面值 A_2 的贷款的无违约风险利率为 r_2，可以用现在的即期价格 S_0 来构造它的一个替代。根据套利理论

$$F = S_0 e^{(r_1 - r_2)T} \tag{56}$$

在看涨和看跌期权平价套利条件下，在未来 T 时刻有权以执行价格 X *出售*一单位 A_2 的欧式*看跌*期权的价值 P 也可以用（53）来进行估价，看涨和看跌期权之间的平价关系为

$$P = C + (X - F)e^{-r_1T} \tag{57}$$

甚至当$\alpha < 1$时，（50）和（53）也是有效的。当$\alpha = 1$，（50）和（53）变成

$$F = e^{\delta - (2/\pi)\beta c \log c}, \tag{58}$$

$$C = Fe^{-r_1T - (2/\pi)c_2 \log c_2} I_1 - Xe^{-r_1T - (2/\pi)c_1 \log c_1} I_2\,, \tag{59}$$

其中c_1和c_2仍如（48）所示，而

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_2 z} s_{11}(z) S_{11}^c\left(\left(c_2 z + \log\frac{X}{F} + \frac{2}{\pi}(c_2\log c_2 - c_1\log c_1)\right)/c_1\right)dz \tag{60}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_1 z} s_{11}(z) S_{11}\left(\left(c_1 z - \log\frac{X}{F} - \frac{2}{\pi}(c_2\log c_2 - c_1\log c_1)\right)/c_2\right)dz \tag{61}$$

4. 3. 应用

稳定期权定价公式（53）不需要进行修正就可以直接用于标的资产为商品、股票、债券和外汇汇率的各种期权的定价，而仅仅需要适当改变对 A_1 和 A_2 两种资产含义的解释。

4.3.a.商品

假设 A_1 和 A_2 是两种消费品，都可用于未来时期 T 的消费。A_1 可以是除了 A_2 之外所有商品的集合。r_1 是面值为 A_1 的贷款的无违约利率。U_1 和 U_2 是 A_1 和 A_2 未来的随机边际效用，同时假设 $\log U_1$ 和 $\log U_2$ 如同在（42）和（43）中一样，有独立分量（u_1 和 u_2）和公共分量（u_3）。用 A_1 来表示的 A_2 的价格 S_T 由（40）决定，如（44）所示，它是对数稳定的。当前远期价格 F 如（50）所示，T 时刻有权购买一单位 A_2 看涨期权的价格 C 由上述（53）给出。

例如，我们可以构造这样一种情形，假定采用一个加法可分的 CRRA 效用函数

$$U(A_1, A_2) = \frac{1}{1-\eta}\left(A_1^{1-\eta} + A_2^{1-\eta}\right), \eta > 0, \eta \neq 1, \tag{62}$$

其中 $A_i = e^{v_i + v_3}, i = 1,2$，$v_1$、$v_2$ 和 v_3 是独立的稳定变量，有共同的 α，且 $\beta = +1$。

4.3.b.股票

假设现在只有单一商品 G，在这里作为我们的分子 A_1。假设 A_2 是某公司的一只股票，该公司在 T 时产生每股商品 G 的随机量 y。r_1 是面值为 G 到期日为 T 的贷款的无违约风险利率。该公司以股利支付率 r_2 支付连续股利，而且它的股票在 T 时之前不具有有价值的投票权，因此，即期交易的一股相当于 T 时 $\exp(r_2 T)$ 股。U_G 是 T 时刻一单位 G 的未来随机边际效用，假设

$$\log U_G = -u_1 - u_3, \tag{63}$$

$$\log y = u_1 - u_2, \tag{64}$$

其中 $u_i \sim S(\alpha, +1, c_i, \delta_i)$ 且相互独立。

那么，每股的边际效用就可以表示成 $yU_G = \exp(-u_2 - u_3)$，用对 G 的无条件要求权（unconditional claim）表示的每股价格，$S_T = (yU_G)/U_G$，也就如上文（44）所示。每股的远期价格，$F = E(yU_G)/E(U_G)$ 如（50）所示。执行价格为 X 的 1 股欧式看涨期权的价值由（53）给出。如果该股票的远期价格无法直接观测，通过（56）可以由 r_1，r_2 和股票即期价格 S_0 算出该股票的远期价格。

（64）表明就特定公司的利好消息（$-u_2$）而言，假定它不存在上帕累托尾。这表明，如果成功的话，公司将生产与可预测数量相当的商品，但仍然有很大的风险，因为公司也很

有可能只生产很少量商品或者根本没有产出。就非特定公司的利好消息（u_1）而言，（63）给出的 G 边际效用也被假定相应地减少了。尽管存在这种无可否认的有限制情形，股票价格 S_T 仍服从参数为α，β，c，δ的一般对数稳定分布。

应当指出，根据期望算术收益，除 $\beta = -1$ 之外，对于一个对数稳定的股票，总体股权资本溢价是无限的。

4.3.c 债券[13]

现在假设只有单一种消费品 G，在未来两个时刻都是可用的，$T_2 > T_1 > 0$。A_1 和 A_2 分别是 T_1 和 T_2 时刻对一单位 G 的无条件债权，U_1 和 U_2 为这两个时刻 G 的边际效用。E_1U_2 是 T_1 时刻 U_2 的期望。在 0 时刻，U_1 和 E_1U_2 都是随机的。假定 $\log U_1 = -u_1 - u_3$ 和 $\log(E_1U_2) = -u_2 - u_3$，其中 $u_i \sim S(\alpha, +1, c_i, \delta_i)$ 且相互独立。在 T_2 时刻支付一单位 G 的债券，在 T_1 时刻的价格 $B(T_1, T_2) = E_1U_2 / U_1$，由前面的（44）给出，而隐含在期限结构中 0 时刻的这种债券的当前远期价格 $F = B(0, T_2)/B(0, T_1) = E_0U_2 / E_0U_1 = E_0(E_1U_2)/E_0U_1$，由前面（50）确定。[14]欧式看涨期权的价格由（53）给出，其中 r_1 是到期日为 T_1 的贷款 0 时刻的实际利率，而“T”用 T_1 代替。

4.3.d 外汇汇率[15]

就实际汇率的波动而言，它们可以象上述 4.3.a 那样，和实际商品价格波动一样简单地进行建模。然而，汇率运动的购买力平价（PPP）模型依照完全*名义*风险提供了对稳定期权模型的另一种有益的解释。

假设 P_1 和 P_2 是未来 T 时刻国家 1 和国家 2 的价格水平。价格水平的不确定性本身一般是正偏斜的。巨大的通货膨胀很容易实现，只要让印钞机高速运转即可，而且这一政策有明显的财政动因。相对而言，通货紧缩却是财政上无法忍受的，而且实际上也是前所未闻。因此，可以合理地假设 $\log P_1$ 和 $\log P_2$ 都是最大正偏斜的。

假设 u_1 和 u_2 分别是 $\log P_1$ 和 $\log P_2$ 独立的特定国家分量，u_3 是两种价格水平的国际分量，反映各国中央银行的羊群趋同效应（herd instincts），u_3 独立于 u_1 和 u_2，因此 $\log P_i = u_i + u_3$，$i = 1,2$。假设 S_T 是给定时间 T 货币 2（A_2）相对货币 1（A_1）的汇率。在 PPP 条件下，

[13] McCulloch（1985a）用这部分的结论，对利率风险下的存款保险进行估价。

[14]当β=0 时，由这一模型可以推导出对数期望假设 $\log F = E\log B(T_1, T_2)$。McCulloch（1993）用反证法证明了 1981 年 Cox 等的债权是无价值的，因为它无可避免地违反了当α=2 时连续时间的无套利条件。远期价格 F 可以表示为 $\exp(r_1T_1 - R_2T_2)$，其中 R_2 是到期日为 T_2 的贷款 0 时刻的实际利率。

[15] 这一小节主要引用 McCulloch（1987），该文中的（12.18）存在一个错误，在本文中（56）得到纠正。

$S_T = P_1/P_2$，正如前面（44）所示。

$\log X$ 的下帕累托尾在 0 点给出 X 自身密度的一个众数(无限密度但不会是无限群体)，在接近 $\exp(E\log X)$ 时给出第二众数（除非 C 相对于单位是大的）。这样，Krasker(1980) 尝试用对数稳定分布达到双峰态来解释"比索问题"，这一基本过程只需要三个参数（如果是对数对称分布）。

假设通货膨胀的不确定性不包含系统风险，为了使得根据购买力计算的期望收益等于零，远期汇率 F 就应该等于 $E(1/P_2)/E(1/P_1)$，并由前述（50）确定。令 r_1 和 r_2 分别为国家 1 和 2 的无违约风险的名义利率。那么，少量期权头寸的预期购买力收益等于零的一单位货币 2 的欧式看涨期权的影子价格由（53）给出。如果需要的话，远期价格 F 可以用套利保值的方法，根据（56），从现在有即期价格 S_0 推导出来。

4.3.e 仿套期率（Pseudo-hedge ratio）

出售一单位资产的看涨期权所产生的风险，可以通过同时购入

$$\frac{\partial\left(C\exp(r_1T)\right)}{\partial F} = e^{c_2^\alpha \sec\theta} I_1 \tag{65}$$

单位的远期标的资产得到部分抵消（一阶近似）。遗憾的是，当 α <2 时，不连续性将使得这一风险无法被完全地对冲掉。同时，这种不完全对冲也表明期权不是多余的金融工具。

4. 4 看涨/看跌期权转化和实值/虚值期权对偶

前面（53）中的 $C(X,F,\alpha,\beta,c,r_1,T)$ 可以写成

$$C(X,F,\alpha,\beta,c,r_1,T) = e^{-r_1T} FC^*\left(\frac{X}{F},\alpha,\beta,c\right), \tag{66}$$

其中 $C^*(X/F,1,\alpha,\beta,c) = C(X/F,\alpha,\beta,c,0,1)$（参见 Merton 1976:139）。同理，一单位 A_2 的看跌期权的价格可以写成

$$P(X,F,\alpha,\beta,c,r_1,T) = e^{-r_1T} FP^*\left(\frac{X}{F},\alpha,\beta,c\right), \tag{67}$$

其中，根据（57），

$$P^*\left(\frac{X}{F},\alpha,\beta,c\right) = P\left(\frac{X}{F},1,\alpha,\beta,c,0,1\right)$$

$$= C^*\left(\frac{X}{F},\alpha,\beta,c\right) + \frac{X}{F} - 1 \tag{68}$$

于是，执行价格为 X[单位 A_1/单位 A_2]的一单位 A_2 的看涨期权，和执行价格为 1/X[单位 A_2/单位 A_1]的 X 单位 A_1 的看跌期权是同一合约。后者的价值，用现货 A_2 度量，等于

$XP(1/X, 1/F, \alpha, -\beta, c, r_2, T)$，因为以 A_2 为单位表示的远期价格是 1/F，而 $\log 1/S_T$ 的参数是α，-β和 c。乘以当前即期价格 S_0，从而得到用现货 A_1 表示的数量，*有看跌期权—看涨期权转化的关系式*，

$$C(X, F, \alpha, \beta, c, r_1, T) = S_0 XP\left(\frac{1}{X}, \frac{1}{F}, \alpha, -\beta, c, r_2, T\right) \tag{69}$$

运用（57）和（68），可以得到下面*实值期权/虚值期权的对偶关系*：

$$C^*\left(\frac{X}{F}, \alpha, \beta, c\right) = \frac{X}{F} P^*\left(\frac{F}{X}, \alpha, -\beta, c\right)$$

$$= \frac{X}{F} C^*\left(\frac{F}{X}, \alpha, -\beta, c\right) - \frac{X}{F} + 1 \tag{70}$$

因此，当 X/F≥1 时，对于具有任意利率、到期日、远期价格和执行价格的看涨期权和看跌期权而言，都可以由 $C^*(X/F, \alpha, \beta, c)$ 来进行估价。

4. 5. 数值期权价值

表 1 的例子给出了 $100C^*(X/F, \alpha, \beta, c)$ 的价值[16]。这是价值（按远期价格计算）等于 100 单位 A_1 的一定数量 A_2 的欧式看涨期权的附加利息价值。例如，A_1 是美元，A_2 是一股股票，表中给出的就是 100 美元的股票的看涨期权的价值，到期日应支付的美元数。

表 1

$100C^*(X/F, \alpha, \beta, c)$

a) α =1.5, β =0.0

	X/F			
C	0.5	1.0	1.1	2.0
0.01	50.007	0.787	0.079	0.014
0.03	50.038	2.240	0.458	0.074
0.10	50.240	6.784	3.466	0.481
0.30	51.704	17.694	14.064	3.408
1.00	64.131	45.642	43.065	28.262

b)c=0.1,X/F=1.0

	β				
α	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0
2.0	5.637	5.637	5.637	5.637	5.637
1.8	6.029	5.993	5.981	5.993	6.029
1.6	6.670	6.523	6.469	6.523	6.670
1.4	7.648	7.300	7.157	7.300	7.648

[16] 需要的偏斜稳定分布和密度可以从 McCulloch 和 Panton(编印中)中的表格得到，不过表 1 是以 DuMouchel(1971)的早期表格进行三次插值为基础的。详细请参阅 McCulloch(1985b)。在 McCulloch(1984)中期权价值以表格列出。

1.2	9.115	8.455	8.137	8.455	9.115
1.0	11.319	10.200	9.558	10.200	11.319
0.8	14.685	12.893	11.666	12.893	14.685

c)c=0.1,X/F=1.1

	β				
α	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0
2.0	2.211	2.211	2.211	2.211	2.211
1.8	2.271	2.423	2.590	2.764	2.944
1.6	2.499	2.772	3.123	3.510	3.902
1.4	2.985	3.303	3.870	4.530	5.175
1.2	3.912	4.116	4.943	5.957	6.924
1.0	5.605	5.391	6.497	8.002	9.410
0.8	8.596	7.516	8.803	11.019	13.067

d)c=0.1,X/F=2.0

	β				
α	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0
2.0	0.000[a]	0.000[a]	0.000[a]	0.000[a]	0.000[a]
1.8	0.000	0.055	0.110	0.165	0.220
1.6	0.000	0.160	0.319	0.477	0.634
1.4	0.000	0.351	0.695	1.032	1.361
1.2	0.000	0.691	1.354	1.991	2.604
1.0	0.000	1.287	2.488	3.619	4.689
0.8	0.000	2.333	4.438	6.372	8.164

注：[a] 实际值是 1.803×10^{-6}，保留小数点 0.000。

表 1 的 a 栏列出了当α固定在 1.5,β固定在 0.0，而 c 和 X/F 变化时的价值。看涨期权的价值随 X/F 的增大而减少，但随着 c 的增大而增大。读者可以验证第一列和最后一列满足（70）。

b-d 栏列出当 c 固定在 0.1，X/F 取三个不同值，而α和β变化时的价值，其中 X/F=1.0 表示“平价期权”（根据远期价格，而不是即期价格），X/F=1.1 表示“虚值期权”（执行价仍在未来价格分布的肩部），X/F=2.0 表示“极度虚值期权”。当α=2 时,β对期权的价值没有作用，即使依照两个边际效用，标的资产价格是变化的[17]。

利用前述的稳定期权公式，根据市场期权价值的数值可以计算出隐含参数值。如果假设β等于 0，可以用执行价格不同而其他因素完全相同的两个期权的同期价格计算出隐含参数值。McCulloch（1987）利用 1984 年 9 月 17 日德国马克的实际行情，用图形计算出了隐含参数值。两个价格表经过舍入误差后得出α的范围是（1.766,1.832），c 的范围是（0.0345,0.0365）。显然，在这任意选择的日期，市场上德国马克并不服从对数正态分布。如果不能排除不对称现象，计算隐含参数α,β和 c 的值就需要用三个期权价值。

4.6. 低概率和短期期权

假设 X>F，c 相对于 log(X/F)较小。令β不变，那么 c_1 和 c_2 也较小。则（2）意味着（详

[17] 这里列出当α=2 时期权价值，作为一种检验，用与推导子高斯（sub－Gaussian）值相同的程序独立计算，然后用于检验当 $\sigma = c\sqrt{2}$ 时的 Black-Scholes 公式。当 x 很大时，用近似值 $1-N(x)\approx n(x)/x$，BS 公式变为 $C^*=N(d_1)-XN(d_2)F\approx \sigma N(d_1)/(d_1 d_2)$，当 log(X/F)/c 取大数值时，其中 $d_1=-\log(X/F)/\sigma+\sigma/2$，$d_2=d_1-\sigma$，$n(x)=N'(x)$，而 F 如（56）所示。

见 McCulloch 1985b）看涨期权的价值 C 近似于

$$Fe^{-r_1T}c^{\alpha}(1+\beta)\psi(\alpha, X/F), \tag{71}$$

其中

$$\psi(\alpha,x)=\frac{\Gamma(\alpha)\sin\theta}{\pi}\left[(\log x)^{-\alpha}-\alpha x\int_{\log(x)}^{\infty}e^{-\zeta}\zeta^{-\alpha-1}d\zeta\right] \tag{72}$$

表 2 详细列出了该函数的值。当 x↓1，它变为无穷大，当α ↑2，它趋近于 0。由看跌期权/看涨期权转换公式（69）（C 和 P 的角色转换），P 等于

$$Xe^{-r_1T}c^{\alpha}(1-\beta)\psi(\alpha, F/X) \tag{73}$$

表 2

$\psi(\alpha,x)$

	X=X/F											
α	1.001	1.01	1.02	1.04	1.06	1.10	1.15	1.20	1.40	2.00	4.00	10.00
2.00	0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	.000	.000	.000	.000	.0000	.0000	.0000
1.95	18.10	1.962	0.989	0.492	0.324	0190	.124	.091	.043	.0168	.0062	.0028
1.90	26.43	3.199	1.665	0.854	0.573	.343	.227	.169	.082	.0329	.0126	.0059
1.80	28.38	4.275	2.369	1.291	0.896	.560	.382	.291	.149	.0633	.0256	.0125
1.70	23.13	4.319	2.544	1.471	1.056	.688	.484	.376	.203	.0914	.0391	.0199
1.60	17.01	3.916	2.448	1.498	1.112	.753	.547	.434	.246	.1172	.0531	.0282
1.50	11.93	3.365	2.227	1.441	1.103	.777	.582	.471	.280	.1411	.676	.0375
1.40	8.22	2.812	1.966	1.341	1.059	.774	.596	.492	.306	.1634	.0827	.0479
1.30	5.65	2.319	1.707	1.225	0.995	.753	.597	.503	.327	.1842	.0985	.0594
1.20	3.92	1.904	1.471	1.106	0.923	.724	.589	.505	.343	.2039	.1150	.0723
1.10	2.77	1.567	1.266	0.995	0.852	.689	.575	.502	.356	.2227	.1325	.0868
1.00	2.02	1.300	1.092	0.894	0.784	.654	.558	.496	.366	.2411	.1511	.1031
0.90	1.51	1.090	0.949	0.806	0.722	.619	.541	.489	.375	.2592	.1710	.1215

在一个α稳定的 lévy 运动中 ，在时间 T 内累积的尺度因子是 $c_0T^{1/\alpha}$ 。当 T↓0，远期价格 F 收敛于即期价格 S_0。因此

$$\lim_{T\downarrow 0}(C/T)=S_0(1+\beta)c_0^{\alpha}\psi(\alpha, X/S_0), \tag{74}$$

$$\lim_{T\downarrow 0}(P/T)=X(1-\beta)c_0^{\alpha}\psi(\alpha, S_0/X) \tag{75}$$

McCulloch(1981，1985a)用（75）对面临利率风险的银行和其他储蓄机构的存款保险中的看跌期权进行估价，通过使用美国国库券收益参数的对称稳定最大似然估计量，来计算纯利率风险。

5.参数估计和实证问题

当α>1 时，OLS 提供稳定分布位置参数δ的一致估计量。但是，它服从和观测值有相同α的无限方差稳定分布，而且是 0 有效性。此外，如果真实分布稳定且α<2，基于错误

的正态性假设的期望替代值会产生不合理性的假证据（Batchlor 1981）。

5.1. 一元稳定参数估计

DuMouchel(1973)表明，最大似然法可以用于估计四个稳定参数，除了α=2 且β=±1 的非标准边界情形，最大似然估计量具有由信息矩阵所确定的一般渐进正态性。1975 年，他将信息矩阵绘制成表，这种信息矩阵可以用于边界情形外的渐进假设检验。正如他指出的，最大似然法事实上是超有效（Super－efficient）的。McCulloch(编印中 a)将非标准零假设α=2 和对称稳定的备择假设似然比的蒙特卡罗临界值列成表。DuMouchel(1983)认为当α的真实值临近 2.00 时，α的最大似然估计量将向下偏倚，但这一结论在 McCulloch(编印中 a)报告的大样本模拟中并没有得到证实（不考虑α≤2 时边界约束的影响）。

在对称稳定条件下，McCulloch(1994b)数值近似可以快速计算似然值，而不需采用 DuMouchel 提出的括弧过程（bracketing Procedure）。McCulloch(1981,1985a)把较早版本的对称稳定最大似然法应用于利率数据。Stuck(1976)用 Bergstrøm 序列，Feuerverger 和 McDunnough(1981)用对数特征函数的傅立叶反演，Brorsen 和 Yang(1990)及 Liu 和 Brorsen(1995)用 Zolotarev 的稳定密度积分表示法，研究了非对称稳定的最大似然法。而 Mittnik 和 Rachev(1993a)运用了 Chen(1991)算法。McCulloch(1979)将稳定残差（stable residuals）的最大似然线性回归应用于对称稳定的情况，Brorsen 和 Preckel(1993)将它用于一般情况。Buckle(1995)和 Tsionas(1995)的研究超出了最大似然的范畴，他们探讨了稳定参数的贝叶斯后验分布。

Fama 和 Roll(1971)提出用顺序统计量来估计对称稳定分布的参数，这一方法要简单得多，但有效性也较低。这一方法得到了广泛的运用。McCulloch(1986)将这一方法扩展到非对称分布的情况，并消除了对称稳定情况中 c 的 Fama-Roll 估计量的一个小渐进偏倚。

在 Press(1972)之后，大量的研究集中于经验对数特征函数对其相应理论部分（3），（4）的拟合。参见 Paulson,Holcomb 和 Leitch(1975)；Feuerverger 和 McDunnough(1977,1981a,b)；Arad(1980)；Koutrouvelis(1980,1981)；Paulson 和 Delehanty(1984,1985)。从业者均声称他们的方法相对于最大似然基准有更高的效率[18]。Mantegna 和 Stanley(1995)对不同抽样间隔取得的收益众数密度，采用了一种新方法估计稳定指数。

Fama(1965)，Leitch 和 Paulson(1975)，Arad(1980)，McCulloch(1994b)，Buckle(1995)，及 Manegna 和 Stanley(1995)都对股票收益的稳定参数进行了估计；Roll(1970)，McCulloch(1985)，Oh(1994)对利率运动的稳定参数、Bagshaw 和 Humpage(1987)，So(1987a,b)，Liu 和 Brorsen(1995)，及 Brousseau 和 Czarnecki(1993)对外汇汇率变化的稳定参数进行了估计；Dusak(1973)，Cornew,Town 和 Crowson(1984)，及 Liu 和 Brorsen(编印中)对商品价格运动的稳定参数进行了估计；Young 和 Graff(1995)对不动产收益的稳定参数进行了估计。以上仅列出了部分研究成果。

5.2. 反对稳定分布的实证研究结果

主要由于两组统计检验，原来对金融收益稳定模型的关注不应有地强化了。第一组检验基于这样的观测，如果日收益率是独立同分布稳定的，周收益率和月收益率也应该是稳定的，并且具有相同的特征指数。Blattberg 和 Gonedes(1974)，以及许多后来的研究人员，特别是 Akgiray 和 Booth(1988)，Hall,Brorsen 和 Irwin(1989)，都发现周收益率和月收益率通常比日收益率具有更大的α估计值。这些现象甚至使得 Fama(1976:26-38)也放弃了股票价格的稳定

[18] 参阅 Blattberg 和 Sargent(1971)，Kadiyala(1972)，Brockwell 和 Brown(1979,1981)，Fielitz 和 Roselle(1981)，Csörgö(1984, 1987)，Zolotarev(1986:217ff)，Akgiray 和 Lamoureux(1987)，及 Klebanov，Melamed 和 Rachev(1994)。

模型。

但是，正如 Diebold(1993)指出的，所有这些现象实际上是拒绝独立同分布稳定性复合假设。它仅能说明收益分布不是恒等的，或者说明收益是非独立的，或者收益不是稳定的。如果收益不是独立同分布，那么它们不是独立同分布稳定也就不足为奇了。现在人们渐渐接受这样的观点(Bollerslev,Chou 和 Kroner,1992)，即大部分金融收益的时间序列都具有 ARCH 或 GARCH 类型的序列相关性。这些扰动项的无条件分布比条件分布具有更高的峰度，因此在错误的独立同分布稳定假设下，会误导出较小的α估计值。

Baillie(1993)错误地将 ARCH 和 GARCH 模型描述成与稳定假设相“对立”的模型。同样的学者还有 Ghose 和 Kroner(1995)，Groenendijk 等(1995)。事实上，如果存在条件异方差（CH），在无限方差稳定下消除它和象高斯分布情形下那样消除它，同样都是可取的。而且如果消除条件异方差之后仍然存在峰态，也可以如在独立同分布情况下那样对调整后的残差正确建模。McCulloch(1985b)和 Oh(1994)因而用对称稳定最大似然法，分别对债券月收益率拟合类 GARCH（GARCH－like）和 GARCH 模型，都发现了条件异方差（CH）和残差非正态的明显证据。Liu 和 Brorsen(编印中)同样发现，与 Gribbin,Harris 和 Lau(1992)的研究发现相反，一旦消除了 GARCH 效应，不能拒绝商品和外汇期货收益的稳定模型。他们的研究也成为反对 Lau,Lau 和 Wingender(1990)的股票收益稳定模型的一个理由。De Vries(1991)提出类 GARCH 次稳定过程，但这一模型尚未被用于实证研究。

股票市场（Gibbons 和 Hess 1981）和外汇市场（McFarland,Pettit 和 Sung 1982）数据中存在周内效应也是众所周知的。无论这种周内效应是以均值或以波动率的形式出现，它们都表明日数据不是同分布。在无限方差稳定下，消除周内效应，以及连同消除可能存在的月末效应和季节效应，和在正态情形下一样重要。Lau 和 Lau(1994)证明了不同尺度的稳定分布的混合倾向于减少α的估计值，使其低于真实值，而不同位置的稳定分布的混合倾向于增大α的估计值，使其高于真实值。

试图拒绝资产收益稳定模型的第二组检验是基于对尾部的帕累托指数的估计，或者是用帕累托分布本身（Hill 1975），或者用广义帕累托（GP）分布（DuMouchel 1983）。为数众多的研究人员，包括 DuMouchel(1983)，Akgiray 和 Booth(1988)，Jansen 和 de Vries(1991)，Hols 和 de Vries(1991)，及 Loretan 和 Phillips(1994)都应用这种检验，所涉及的数据包括利率变化，股票收益率和汇率的数据。通常他们都得到大于 2 的指数，并据此在渐进检验基础上“拒绝”稳定模型。

然而，McCulloch(1994b)认为，和已有研究相比较，在样本容量有限的情形下，当稳定分布的α大于 1.65 时，尾部指数的估计值很可能就会大于 2。在渐进检验基础上，这些估计值甚至可能“显著”大于 2。因此，这些研究结果和帕累托稳定分布是相一致的[19]。

现在已经提出几种其他分布可用于解释金融收益显著的峰态。Blattberg 和 Gonedes(1974)及 Boothe 和 Glassman(1987)提出用学生 t 分布来解释，该学生 t 分布可以计算分数（fractional）的自由度，而且和稳定分布一样，包括柯西分布和正态分布。其他学者（如 Hall,Brorsen 和 Irwin 1989；Durbin 和 Cordero 1993）考虑用混合的正态分布来解释。Boothe 和 Glassman(1987)发现学生 t 分布在某种程度上比混合的正态分布或者稳定分布有更高的似然值，但这些假设是非嵌套(not nest)的，因此似然比并不一定服从 χ^2 分布。Lee 和 Brorsen(1995)使用 cox 类检验取得比这种非嵌套假设更好的结果。但是，正如 DuMouchel(1973b)已经指出的，没有极大的样本，很难对这些分布从根本上加以区分。最后，选择何种尖峰态分布在很大程度上取决于它们合乎要求的性质，特别是可分性，简约性和中心极限性质。Csörgö(1987)对稳定

[19] Mittnik 和 Rachev(1993b:264-5)同样发现威尔布分布的尾部指数估计值落在 2.5-5.5 范围，即使威尔布分布没有帕累托尾。

性的一个方面建立了一种正式检验，但用选取的股票价格数据不能拒绝该检验。

Mittnik 和 Rachev(1993a)拓展了加法和乘法意义下分别（对应于稳定分布和对数稳定分布）的“稳定性”概念，使之包括最大和最小算子意义下的稳定性，以及这些分布累积和极值运算在随机重复意义下的稳定性，重复的次数由几何分布确定。他们发现 Weibull 分布具有两个广义稳定性的性质。因为它只有正支集（positive support），他们提出用*双 Weibull 分布*（背靠背的两个 Weibull 分布）来作为资产收益的模型。这个分布有一个不适当的性质，即它在原点的密度不是无穷大就是等于 0，只有背靠背的指数分布例外，但它在原点仍有一歧点（cusp）。另一方面，稳定密度是有限的、单峰、绝对可微的，且具有闭支集（closed support）。

5. 3. 状态空间模型

Kitagawa(1987)使用贝叶斯方法来估计稳定状态空间模型。当只有一个状态变量时，状态变量和似然值的边际回溯后验（过滤）分布大约要求有 m 个结点（node）的 mn 数值积分，其中 n 是样本容量。模型的超参数（hyperparameter）可以用最大似然法估计，而边际全样本后验（平滑）分布用另外 n 个数值积分计算。如果扰动项是对称稳定的，McCulloch(1994b)提出的密度逼近法使得这些计算可行，甚至用个人计算机就可以完成，尽管要经过最大似然法的多次迭代计算。

Oh(1994)对美国国库券的超额收益估计出了一个 AR(1)的时变期限溢价（time-varying term premium）（状态变量）模型。经过对显著的状态空间 GARCH 效应进行调整后，他发现最大似然估计的$\hat{\alpha}$值在 1.61 到 1.80 的范围内，检验零假设 α =2 的 LR 统计量（2Δ logL）在 12.95 到 25.26 的范围内。使用 McCulloch(1994b)的临界值，他们都在等于或大于 0.996 的水平上拒绝正态性。（参见 Bidarkota 和 McCulloch(1996)）。

多元状态变量大大增加了 Kitagawa 的方法所需要的数值积分个数和计算时间。然而，状态变量还可以用 McCulloch（1994a,在 Durbin 和 Cordero 1993 之后）提出的后验众数估计量方法，在适当的时间内估计出来。在许多情况下，超参数可以通过把合并最大似然法（Pooled ML）应用于数据的不同线性组合来进行估计（尽管没有完全信息最大似然法的有效性）。

Mikosch，Gadrich，Klüppelberg 和 Adler(1995)考虑了一种标准 ARMA 过程，其中的新生项（innovation）属于对称稳定定律的吸引域。因为没有数值密度逼近的方法，他们采用基于样本周期图的 Whitlle 估计量，而没有采用更容易解释的最大似然法。

5. 4. 多元稳定分布的估计

尽管多元稳定分布对金融理论和实践有重大意义，多元稳定分布参数的估计仍处于研究的初始阶段。Mittnik 和 Rachev(1993b:365-66)提出一种估计向量的一般二元谱测度方法，向量的分布落在该吸引域。Cheng 和 Rachev(编印中)用这种方法研究美元/马克和美元/日元的汇率，得到了一个有趣的结果，即在第一和第三象限中心附近存在相当大的密度，如果存在一个特定美元因子对两种汇率有同样影响，但沿着轴线却没有影响，就会出现这种情况。后者似乎表明马克或日元的冲击是微不足道的。

Nolan，Panovska 和 McCulloch(1996)提出一种基于最大似然法的另一种方法，这种方法使用了整个数据集，而 Mittnik 和 Rachev 的方法仅使用了数据的一个小子集，即从样本的极值尾部得出。这种方法不需要实际计算多元稳定密度，这通常是很困难的工作（参见 Byczkowski 等，1993；Nolan 和 Rajput，1995），而仅仅依赖于标准一元稳定密度。这一方法显然假设 x 事实上服从二元稳定分布，而不是仅仅落在它的吸引域。

附录

从（52）推导（53）

在附录中，假设 $s_i(u_i)$ 和 $S_i(u_i)$ 分别表示 $s(u_i,\alpha,+1,c_i,\delta_i)$ 和 $S(u_i,\alpha,+1,c_i,\delta_i)$，$i=1,2,3$。当 $u_2<u_1-\log X$ 时，有 $S_T>X$。于是，设 $z=(u_2-\delta_2)/c_2$，$S_i^c=1-S_i$，就有

$$\int_{S_T>X}U_2dP(U_1,U_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{u_1-\log X}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u_2-u_3}s_1(u_1)s_2(u_2)s_3(u_3)du_3du_2du_1$$

$$=Ee^{-u_3}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u_2}s_2(u_2)\int_{u_2+\log X}^{\infty}s_1(u_1)du_1du_2$$

$$=Ee^{-u_3}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u_2}s_2(u_2)S_1^c(u_2+\log X)du_2$$

$$=Ee^{-u_3}e^{-\delta_2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c_2z}s_{\alpha1}(z)S_1^c(c_2z+\delta_2+\log X)dz$$

$$=Ee^{-u_3}e^{-\delta_2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c_2z}s_{\alpha1}(z)S_{\alpha1}^c\left(\frac{c_2z-\delta\ \ +\log X}{c_1}\right)dz$$

$$=Ee^{-u_3}e^{-\delta_2}I_1,$$

其中，用（50），I_1 如文中（54）所示。同样，令 $z=(u_1-\delta_1)/c_1$，

$$\int_{S_T>X}U_1dP(U_1,U_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{u_1-\log X}\int_{\infty}^{\infty}e^{-u_1-u_3}s_1(u_1)s_2(u_2)s_3(u_3)du_3du_2du_1$$

$$=Ee^{-u_3}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u_1}s_1(u_1)\int_{-\infty}^{u_1-\log X}s_2(u_2)du_2du_1$$

$$=Ee^{-u_3}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u_1}s_1(u_1)S_2(u_1-\log X)du_1$$

$$=Ee^{-u_3}e^{-\delta_1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c_1z}s_{\alpha1}(z)S_2(c_1z+\delta_1-\log X)dz$$

$$=Ee^{-u_3}e^{-\delta_1}I_2,$$

其中 I_2 如（55）所示。代入（52）就可以得出（53）。

致谢

作者在此对 James Bodurtha，Stanley Hales，Sergei Klimin，Benoit Mandelbrot，Richard May，Svetlozar Rachev，Gennady Samorodnitsky，和 Walter Torous 表示感谢，感谢他们对本文各个方面的评论，也对费城股票交易所为第 4 节提供的金融数据支持表示感谢。

参考文献

Akgiray, V. and G. G. Booth (1988). The stable-law model of stock returns. J. Business Econom. Statist. 6, 51-57.

Akgiray, V. and C. G. Lamoureux (1989). Estimation of the stable law parameters: A comparative study. J. Business Econom. Statist. 7, 85-93.

Arad, R. W. (1980). Parameter estimation for symmetric stable distribution. Internat. Econom. Rev. 21, 209-220.

Bagshaw, M. L. and O. F. Humpage (1987). Intervention, exchange-rate volatility, and the stable Paretian distribution. Federal Reserve Bank of Cleveland Res. Dept.

Baillie, R. T. (1993). Comment on modeling asset returns with alternative stable distributions. Econometric Rev. 12, 343-345.

Batehetor, R. A. (1981). Aggregate expectations under the stable laws. J. Econometrics 16, 199-210.

Bates, D. S. (1996). Testing option pricing models. Handbook of Statistics. Vol. 14, North Holland, Amsterdam, in this volume.

Bergstrom, H. (1952). On some expansions of stable distribution functions. Arki Mathematik 2, 375-378.

Bidarkota P. V. and J.H. McCalloh (1996). Sate-space modeling with symmetric stable shocks; The case of U.S. Inflation. Ohio Sate Univ. W.P. 96-02.

Black, F. and M. Scholes (1973). The pricing of options and corporate liabilities. J. Politic. Econom. 81 637-659.

Blattberg, R. C. and N. J. Gonedes (1974). A comparison of the stable and student distributions as statistical models for stock prices, ar. Business 47, 244-280.

Blattberg, R. C. and T. Sargent (1971). Regression with non-Gaussian stable disturbances: Some sampling results. Econometrica 39, 501-510.

Bollerslev, T., R. Y. Chou and K. F. Kroner (1992). ARCH modeling in finance. J. Econometrics 52, 5-60

Boothe, P. and D. Glassman (1987). The statistical distribution of exchange rates. J. Internat. Econom. 22, 297-319.

Brockwell, P. J. and B. M. Brown (1979). Estimation for the positive stable laws. I. Austral. J. Statist. 21, 139-148.

Brockwell, P. J. and B. M. Brown (1981). High-efficiency estimation for the positive stable laws. J. Amer. Statist. Assoc. 76, 626-631.

Brorsen, B. W. and P. V. Preckel (1993). Linear Regression with stably distributed residuals. Comm. Statist. Thy. Meth. 22, 659-667.

Brorsen, B. W. and S. R. Yang (1990). Maximum likelihood estimates of symmetric stable distribution parameters. Comm. Statist. Sim. & Comp. 19, 1459-1464.

Brousaeau, V. and M. O. Czarnecki (1993). Modelisation des taux de change: Le mode. le stable.

Cahiers Eco & Maths, no. 93.72, Univ. de Paris I.
Buckle, D. J. (1995). Bayesian inference for stable distributions. J. Amer. Statist.Assoc. 90, 605-613.
Byczkowski, T., J. P. Nolan and B. Rajput (1993). Approximation of multidimensional stable densities. J. Multivariate Anal 46, 13-31.
Chambers, J. M., C. L. Mallows and B. W. Stuck (1976). A method for simulating stable random variables. J. Amer. Statist. Assoc. 71, 340-344. Corrections 82 (1987): 704, 83 (1988): 581.
Chen, y. (1991). Distributions for asset returns. Ph.D. dissertation, SUNY-Stony Brook, Econom.
Cheng, B. N. and S. T. Rachev (in press). Mu]tivariate stable commodities in the futures market. Math. Finance.
Cornew, R. W., D. E. Town, and L. D. Crowson (1984). Stable distributions, futures prices, and the measurement of trading performance. J. Futures Markets 4, 531 557.
Csö rg ö, S. (1984). Adaptive estimation of the parameters of stable laws. In: P. Révész, ed., Coll. Math.
Soc. Jάnos Bolyai 36, Limit Theorem in Probability and Statistics. North Holland, Amsterdam.
Csörgö, S. (1987). Testing for stability. In: P. R6v6sz et al., eds., Coll, Math Soc. Jdnos Balyai 36, Goodnes~of-Fit. North Holland, Amsterdam.
De Vriea, C. G. (1991), On the relation between GARCH and stable processes. Econometrics 48, 313-324.
Diebold, F. X. (1993). Comment on 'Modeling asset returns with alternative stable distributions.' Econometric Rev. 12, 339-342.
DuMouchel, W. H. (1971). Stable Distributions in Statistical Inference. Ph.D. dissertation, Yale Univ.
DuMouchel, W. H. (1973a). On the asymptotic normality of the maximum-likelihood estimate when sampling from a stable distribution. Ann. Statist. 1, 948-957.
DuMouchel, W. H. (1973b). Stable distributions in statistical inference: I. Symmetric stable distributions compared to other long-tailed distributions. J. Amer. Statist. Assoc. 68(342): 469-477.
DuMouehel, W. H. (1975). Stable distributions in statistical inference: 2. Information from stably distributed samples. J. Amer. Statist. Assoc. 70, 386-393.
DuMouchel, W. H. (I983). Estimating the stable index α in order to measure tail thickness: A critique. , Ann. Statist. 11, 1019-1031.
Durbin, J. and M. Cordero (1993). Handling structural shifts, outliers and heavy-tailed distributions in state space models. Statist. Res. Div., U.S. Census. Bur.
Dusak [Miller], K. (1973). Futures trading and investor returns: An investigation of commodity risk premiums. J. Politic. Econom. 81, 1387-1406.
Fama, E. F. (1965). Portfolio analysis in a stable Paretian market. Mgmt. Sci. 11, 404-419.
Fama, E. F. (1976). Foundations of Finance. Basic Books, New York.
Fama, E. F. and R.Roll (1968). Some properties of symmetric stable distributions. J. Amer, Statist. Assoc. 63, 817-836.
Fama, E. F. (1971). Parameter estimates for symmetric stable distributions. J. Amer. Statist. Assoc. 66, 331-338.
Feuerverger, A. and P. McDunnough (1977). The empirical characteristic function and its applications. Ann. Statist. 5, 88-97.
Feuerverger, A. (1981a). On the efficiency of empirical characteristic function procedures. J. Roy. Statist. Soc. 43B(I): 20-27.
Feuerverger, A. (1981b). On efficient inference in symmetric stable laws and processes. In: M.

Csörgö

et al., eds., Statistics and Related Topics. North-Holland, Amsterdam.

Fielitz B. D. and J. P. Roselle (1981). Method of moments estimators for stable distribution parameters. Appl. Math. Comput. 8, 303-320.

Gamrowski, B. and S. T. Rachev (1994). Stable models in testable asset pricing. In: G. Anastassiou and S. T. Rachev, eds., Approximation, Probability, and Related Fields. Plenum, New York.

Gamrowski, B. and S. T. Rachev (1995). A testable version of the Pareto-stable CAPM. Ecole Polytechnique and Univ. of Calif., Santa Barbara.

Ghose, D. and K. F. Kroner (1995). The relationship between GARCH and symmetric stable proceases: Finding the source of fat tails in financial data. J. Empirical Finance 2, 225-251.

Gibbons, M. and P. Hess (1981). Day of the week effects and asset returns. J. Business 54, 579-596.

Gribbin, D. W., R.W. Harris, and H. Lau (1992). Futures prices are not stable-Paretian distributed. J. Futures Markets 12, 475-487.

Groenendijk, P. A., A.Lucas, and C. G. de Vries (1995). A note on the relationship between GARCH and symmetric stable processes. J. Empirical Finance 2, 253-264.

Hall, P. (1981). A comedy of errors: The canonical form for a stable characteristic function .Bull. London Math. Soc. 13, 23-27.

Hall, J. A., B. W. Brorsen, and S. H. Irwin (1989). The distribution of futures prices: A test of the stable Paretian and mixture of normal hypotheses. J. Financ. Quant. Anal. 24, 105-116.

Hardin, C. D., G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu (1991). Nonlinear regression of stable random variables. Ann. ,4ppl. Prob. 1, 582--612.

Hill, B. M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. Ann. Statist. 3, 1163-1174.

Holt, D. and E. L. Crow (1973). Tables and graphs of the stable probability density functions. J. Res. NatL Bur. Standards 77B, 143-198.

Hols, M. C. A. B. and C. G. de Vries (1991). The limiting distribution of external exchange rate returns. J: Appl. Econometrics 6, 287-302.

Janicki, A. and A. Weron (1994). Simulation and Chaotic Behavior of α-stable Stochastic Processes. Dckkcr, New York.

Jansen, D. W. and C. G. de Vries (1991). On the frequency of large stock returns. Rev. Econom. Statist. 73, 18--24.

Jones, E. P. (1984). Option arbitrage and strategy with large price changes. Financ. Econom. 13, 91-113.

Kadiyala, K. R. (1972). Regression with non-Gaussian stable disturbances. Econometrica 40, 719-722.

Kitagawa, G. (1987). Non-Gaussian state-space modeling of nonstationary time series. J. Amer. Statist. Assoc. 82, 1032-1063.

Klebanov, L. B., J. A. Mclamed and S. T. Raehev (1994). On the joint estimation of stable law parameters. In: G. Anastassiou and S. T. Raehev, eds., Approximation, Prob., and Related Fields. Plenum, New York.

Koedijk, K. G., M. M. A. Schafgans, and C. G. de Vries (1990). The tail index of exchange rate returns. J. Internet. Econom. 29, 93-108.

Koutrouvclis, I. A. (1980). Regression-type estimation of the parameters of stable laws. J. Amer. Statist. Assoc. 75, 918-928.

Koutrouvelis, I. A. (1981)? An iterative procedure for the estimation of the parameters of stable laws.

Comm. Statist. Sim. & Comp. B10(I), 17-28.
Kxasker, W. S. (1980). Thc "peso problem" in testing the efficiency of forward exchange markets. J. Monetary Econom. 6, 269-276.
Lau, A. H. L., H.'S. Lau and J. R. Wingender (1990). The distributionof stock returns: New evidence against the stable model. J. Business Econorn. Statist. 8, 217-233.
Lau, H. S. and A. H. L. Lau (1994). The reliability of the stability-under-addition test for the stable-Paretian hypothesis,J. Statist. Comp. & Sim. 48, 67-80.
Ledoux, M. and M. Talagrand (1991). Probability in Banach Spaces. Springer, New York.
Lee, J. H. and B. W. Brorsen (1995). A Cox-type non-nested test for time series models. Oklahoma State Univ.
Leitch, R. A. and A. S. Paulson (1975). J. Amer. Statist. Assoc. 70, 690-697.
Lévy, P. (1937). La th~orie de l'addition des variables al éatoires. Gauthier-Villars, Paris.
Iiu, S. M. and B. W. Brorsen (1995). Maximum likelihood estimation of a GARCH-stable model. J. Appl. Econometrics 10, 273-285.
Liu, S. M. and B. W. Brorsen (In press). GARCH-stable as a model of futures price movements. Rev. Quant. Finance & Accounting.
Loretan, M, and P. C. B. Phillips (1994). Testing the covariance stationarity of heavy-tailed time series. J. EmpiricalFinance 1, 211 248.
Mandelbrot, B. (1960). The Pareto-Lévy law and the distribution of income. Internat. Econom. Rev. 1, 79-106.
Mandelbrot, B. (1961). Stable Paretian random fluctuations and the multiplicative variation of income. Econometrica 29, 517-543.
Mandelbrot, B. (1963a). New methods in statistical economies. J. Politic. Econom. 71, 421-440.
Mandclbrot, B. (1963b) The variation of certain speculative prices. J. Bus/ness 36, 394--419.
Mandelbrot, B. (1983). The Fractal Geometry of Nature. New York: Freeman.
Mantegna, R. N. and H. E. Stanley (1995). Scaling behavior in the dynamics of an economic index. Nature 376 (6 July), 46-49.
McCulloeh, J. H. (1978). Continuous time processes with stable increments. J. Business51, 601-619.
McCulloch, J. H. (1979). Linear regression with symmetric stable disturbances. Ohio State Univ. Econom. Dept. W. P. #63.
McCulloch, J. H. (1981). Interest rate risk and capital adequacy for traditional banks and financial intermediaries. In: S. J. Mmsel, ed., Risk and Capital Adequacy in Commercial Banks, NBER, Chicago, 223-248.
McCulloch, J. H. (1984). Stable option tables. Ohio State Univ. Econom. Dept.
McCulloch, J. H. (1985a). Interest-risk sensitive deposit insurance premia: Stable ACH estimates. J. Banking Finance 9, 137-156.
McCulloch, J. H. (1985b). The value of European options with log-stable uncertainty. Ohio State Univ. Econom. Dept.
McCulloch, J. H. (1986). Simple consistent estimators of stable distribution parameters. Comm. Statist. Sim. & Comput. 15, 1109-1136.
McCulloch, J. H. (1987). Foreign exchange option pricing with log-stable uncertainty. In: S. J. Khoury and A. Ghosh, eds. Recent Developments in Internat. Banking and Finance 1. Lexington, Lexington,
MA., 231-245.

McCulloch, J. H. (1993). A reexamination of traditional hypotheses about the term structure: A comment. J. Finance 48, 779-789.

McCulloch, J. H. (1994a). Time series analysis of state-space models with symmetric stable errors by posterior mode estimation. Ohio State Univ. Econom. Dept. W.P. 94-01.

McCulloch, J. H. (1994b) Numerical approximation of the symmetric stable distribution and density. Ohio State Univ. Econom. dept.

McCulloch, J. H. (in press a). Measuring tail thickness in order to estimate the stable index α: A critique. J. Business Econom. Statist.

McCulloch, J. H. (in press b). On the parameterizati0n of the afecal stable distributions. Bull. London Math. Soc.

McCulloch, J. H. and B. S. Mityagin (1991). Distributional closure of financial portfolio returns. In: C.V. Stanojevic and O. Hadzic, eds., Proc. Internat. Workshop in Analysis and its Applications. (4th Annual Meeting, 1990). Inst. of Math., Nevi Sad, 269-280.

McCulloch, J. H. and D. B. Panton (in press). Precise fractiles and fractile densities of the maximally-skewed stable distributions. Computational Statistics and Data Analysis.

McFarland, J. W., R. R. Pettit and S. K. Sung (1982). The distribution of foreign exchange prices: Trading day effect and risk measurement. J. Finance 37, 693-715.

Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. J. Financ. Econom. 3, 125-144.

Mikosch, T., T. Gadrich, C. Kliippelberg and R. J. Adler (1995). Parameter estimation for ARMA models with infinite variance innovations. Ann. Statist. 23, 305-326.

Mittnik, S. and S. T. Rachev (1993a). Modeling Asset Returns with Alternative Stable Distributions. Econometric Rev. 12 (3), 261-330.

Mittnik, S. and S. T. Rachev (1993b). Reply to comments on Modeling asset returns with alternative stable distributions, and some extensions. Econometric Rev. 12, 347-389.

Modarres, R. and J. P. Nolan (1994). A method for simulating stable random vectors. Computional Statist. 9, 11-19.

Nolan, J. P., A. K. Panorska and J. H. McCulloch (1996). Estimation of stable spectral measures. American Univ. Dept. of Math. and Statistics.

Nolan, J. P. and B. Rajput (1995) Calculation of multidimensional stable densities. Comm. Statist. Sim. & Comp. 24, 551-566.

Oh, C. S. (1994). Estimation of Time Varying Term Premia of U. S. Treasury Securities: Using a STARCH Model with Stable Distributions. Ph.D. dissertation, Ohio State Univ.

Panton, D. B. (1989) The relevance of the distributional form of common stock returns to the construction of optimal portfolios: Comment. J. Financ. Quant. Anal. 24, 129-131.

Panton, D. B. (1992). Cumulative distribution function values for symmetric standardized stable distributions. Comm. Statist. Sim. & Comp. 21, 485-492.

Paulson, A. S. and T. A. Delehanty (1984) Some properties of modified integrated squared error cstimators for the stable laws. Comm. Statist. Sim. & Comp. 13, 337-365.

Paulson, A. S. and T. A. Delehanty (1985). Modified weighted squared error estimation procedures with spec/al emphasis on the stable laws. Comm Statist. Sim. & Comp. 14, 927-972.

Paulson, A. S., W. E. Holcomb and R. A. Leitch (1975). The estimatibn of the parameters of the stable laws. Biometrika 62, 163-170.

Peters, E. E. (1994). Fractal Market Analysis. Wiley, New York.

Press, S. J. (1972). Estimation in univariate and multivariate stable distributions. J. Amer. Statist. Assoc. 67, 842-846.

Press, S. J. (1982). Applied Multivariate Analysis: Using Bayesian and Frequentist Methods of Inference.
2nd ed. Kriegcr, Malabar, FL.

-P, achev, S. R., and G. Samorodnitsky (1993). Option pricing formulae for speculative prices modeled by subordinated stochastic processes. SERDICA 19, 175-190.

Roll, R. (1970). The Behavior of Interest Rates: The Application of the Efficient Market Model to U.S. Treasury Bills. Basic Books, New York.

Rubinstein, M. (1976). The valuation of uncertain income streams and the pricing of options. Bell J. Econom. 7, 407-422.

Samorodnitsky, G. and M. S. Taqqu (1994). Stable Non-Gaussian Random Processes. Chapman and Hall, New York.

Samuelson, P. A. (1965). Rational theory of warrant pricing. Industrial Mgmt. Rev. 6, 13-31.

Samuelson, P. A. (1967). Efficient portfolio selection for Pareto-Lévy investments. J. Financ. Quant. Anal. 2, 107-122.

Smith, C. (1976). Option pricing: A review. J. Financ. Econom. 3, 3-51.

So, J. C. (1987a). The Distribution of Foreign Exchange Price Changes: Trading Day Effects and Risk Measurement - A Comment. J. Finance 42, 181-188.

So, J. C. (1987b). The Sub-Gaussian Distribution of Currency Futures: Stable Paretian or Nonstationary? Rev. Econom. Statist. 69, 100-107.

Stuck, B. W. (1976). Distinguishing stable probability measures. Part I: Discrete time. Bell System Tech. J. 55, 1125-1182.

Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. Rev. Econorn. Stud. 25, 65-86.

Tsionas, E.G. (1995). Exact inference in econometric models with stable disturbances. Univ. of Toronto Econom. Dept.

Young, M. S., and R. A, Graft (1995). Real estate is not normal: A fresh look at real estate return distributions. J. Real Estate Finance and Econom. 10, 225-259.

Wu, W. and S. Cambanis (1991). Conditional variance of symmetric stable variables. In: S. Cambanis, G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, eds., Stable Processes and Related Topics. Birkhäuscr, Boston,
85-99.

Ziemba, W. T. (1974). Choosing investments when the returns have stable distributions. In:
P. L. Hammer and G. Zoutendijk, eds., Mathematical Programming in Theory and Practice. North-
Holland, Amsterdam.

Zolotarev, V. M. (1957). Mellin-Stieltjes transforms in probability theory. Theory Probab. Appl. 2, 433-460.

Zolotarev, V. M. (1981). Integral transformations of distributions and estimates of parameters of spherically symmetric stable laws. In: J. Gani and V. K. Rohatgi, eds., Contributions to Probability.
Academic Press, New York, 283-305.

Zolotarev, V. M. (1986). One-Dimensional Stable Laws. Amcr. Math. Soc., (Translation of Odnomernye Ustoichivye Raspredeleniia, NAUKA, Moscow, 1983.).