

## 第 11 章 非线性时间序列、复杂理论和金融学\*

William A. Brock 和 Pedro J. F. de Lima

### 1. 引言

本文描述一系列近期金融研究工作中的统计问题，这些工作与“非线性”、“长期依赖”、“肥尾”、“混沌理论”和“复杂理论”这些词有关。为了给读者提供一个这里所要讨论的问题的路径图，我们将给出一个相当长的引言。根据路径图的精神，我们将用各部分的标题标明每个详细讨论到的问题，对于本文没有讨论到的问题，我们将给出参考文献。在开始前，我们先就一些近来“流行的”、将在本文中起作用的主题进行简短的回顾。

复杂理论的研究中心如布鲁塞尔学院 (Brussels School)、斯图加特学院 (Stuttgart School)、圣达菲研究所 (Santa Fe Institute) 和一大帮其他相关的中心及研究所在全球迅速出现，并且正在转向以计算机为基础的方法和进行分析的方法来研究处在红色标题“复杂系统”中的现象。

确实，知名度很高的中心如圣达菲研究所(SFI)把计算机和各种类型的“适应性计算方法”以及“人工生命”放在他们研究战略的中心位置。一般说来，SFI 的方法是把来自经济学、进化生物学、计算机科学、相互作用系统理论和统计机制的想法综合在一起。

SFI 研究经济学和金融学方法的一个好综述见 LeBaron 编辑的 SFI 1993 年 7 月的通讯。SFI 风格的金融研究的一个好例子是 Arthur、Holland、LeBaron、Palmer 和 Taylor (1993) 关于“人工股票市场”的研究。在该研究中，不同种类的交易策略随着他们努力最大化一个适当性的指标（如利润）而共同发展。这个系统设计在一个台式计算机上运行，用 SFI 式的术语来说，可以看成是某种形式的“人工经济生命”。Arthur 等人的系统无法得到分析的结果。

Friedman 和 Rust (1993) 编辑的书包括分析、实验和实证研究等相关的研究工作。有一部分是关于 SFI 进化锦标赛的设计和实验。在该锦标赛中，交易策略在 Axelrod 关于囚徒困境博弈进化锦标赛著名研究的背景下，彼此相互竞争。

象 Brock(1993)、Friggit (1994)、Vaga (1994) 这样的金融研究工作属于相互作用系统的范畴。Vaga(1994)的研究是建立在其前期研究工作的基础上的，这个前期工作用统计机制来建立会呈现相变 (Phase Transitions) 的一个股票市场模型。Friggit(1994)用统计机制类型的方法提出和研究一个高频外汇市场的动态进化理论。Brock(1994)根据由计量经济学、被普遍接受的资产定价理论和统计机制构建的离散选择理论模型的统一性，建立了一个理论。关于这类理论，在下面的第 4 节详细讨论。

统计领域本身已经在朝一个相关的方向发展。以模拟为基础的方法如自助法 (bootstrap method) (P. Hall(1994), Maddala 与 Li (1995)) 和模拟矩动态法 (dynamic method of simulated moments) (Duffie 和 Singleton (1993), Mcfadden (1989) 以及 Pakes 和 Pollard (1989)) 正在使得诸如渐近展开(一阶和更高阶)这样的分析方法偏离传统的分析框架。

本文将一部分篇幅花在讨论有关统计金融学中一种研究方式上。在该研究方式中，由直接的理论争论产生的模型，通过象模拟矩方法(MSM)这样的计算机辅助方法来估计。在零假

---

\*第一作者感谢国家自然科学基金 (批准号 SBR-9422670) 和 Vilas 信托公司的资助。本文得益于 Michelle Barnes, Craig Hiemstra, Blake LaBaron, G.S. Maddala 和 J. Huston McCulloch 的评论。通常的文责自负的声明这里也适用。

设下，通过对与金融相关的数量自助（bootstrapping）来对模型的适当性进行检验（设定检验）。这就是说，用于设定检验的数量本身就是由经济和金融行为的类别引起的。例如，在 Brock、Lakonishok、LeBaron（1992）以及 Levich 和 Thomas（1993）的文章中，在要检验的零假设模型下，自助法搜集到交易策略的统计分布。

### 1.1. 金融研究中的复杂理论

尽管“复杂理论”有时包括混沌理论，本文不会将太多时间用于混沌理论在金融中的应用上。那样的主题已经有很多文献综述，其中包括 Abhyankar、Copeland 和 Wong（1995），Brock, Hsieh 和 LeBaron（1991），Creedy 和 Martin（1994），LeBaron（1994）以及 Scheinkman（1992）。

“复杂”理论是一个相当含糊的术语。在本文中，我们用“复杂”理论来指代象布鲁塞尔学院（例如 Prigogine 和 Sanglier（1987））、斯图加特学院（例如 Weidlich（1991））和 SFI 这样的中心的研究实践。事实上，“复杂”是如此难以定义，以至于近期《科学美国人》Horgan（1995）写的一篇以复杂的定义为主题的文章，提到麻省理工学院（MIT）的物理学家 Seth Lloyd 已经列出至少 31 条不同的“复杂”的定义。在此，我们将采取一个“智能因素分析”（intellectual factor analysis）的策略，即抽出能体现我们希望在这篇文章中覆盖的、大多数“复杂研究”实践的一些主要主题。

这些研究实践的一个重要子集包括建立如下形式的动态系统模型， $Y_t = h(X_t, \xi_t)$ ， $X_t = F(X_{t-1}, \eta_t, \theta)$ ，这里  $X_t$  是日期  $t$  的状态向量， $Y_t$  是系统发出的可观测向量， $\xi_t$  是一个在时间  $t$  可能冲击观测函数  $h$  的随机震动， $\eta_t$  是一个可能冲击系统在时间  $t$  的运动规则  $F$  的随机震动。 $\theta$  是一个“调谐”（tuning）参数或“缓慢改变”参数。将解析的方法和基于计算机的方法混合起来研究每个固定  $\theta$  下的系统的长期行为。然后让  $\theta$  变化以研究这样的长期行为如何随  $\theta$  的变化而变化。这些变化与“突现行为”（emergent behavior）或“突现结构”（emergent structure）相关联。

这条研究路线也有主要的次主题，即强调多简单的规则  $F$  可以导致可观测值  $Y$  的复杂行为。这些研究的次主题希望将以计算机为基础和以分析为基础的方法相结合，对产生不同类型的“复杂”机制的“多样性类别  $F$ ”（universality classes of  $F$ 's）进行分门别类，用这样的研究策略挖掘出产生我们在自然界中看到的复杂行为的少量“多样性类别  $F$ ”。

各种各样的系统被用于对突现结构相似的“种类”（species）进行划分。象分叉周期性翻倍雪崩（period doubling cascades of bifurcation）这样的“混沌路径”（route of chaos）是这类研究方法广为人知的例子。在 Allen 和 McGlade 对渔业的研究中（Prigogine、Sanglier（1987）的论文和 Weidlich 对斯图加特学院研究的文献综述（Weidlich（1991）），以及 Krugman 在国际贸易和经济地理描述了这类研究（Krugman（1993））。

“复杂”理论的一个有趣的次主题是研究复杂系统。复杂系统的内部机制是如此复杂，以至于人们通过搜寻系统发出的可观测值的“尺度化法则”（scaling laws）来研究这些系统。在这里尺度化法则大致可理解为包括资产收益率、资产收益率的波动率以及象不同的股票、外汇等不同资产的交易量的自相关和互相关的规律。

寻找这些“尺度化法则”的目的，是希望它们对特定的复杂系统的细节是稳健的，而且在复杂系统的主要类别中大致相同。注意所寻找的主要类别动态系统目标的相似性，在该类动态系统内，当  $\theta$  改变时“突现行为”是一样的。

希望在高度相异的复杂系统中有“普遍的尺度化法则”（universal scaling laws）是驱动这类研究的源泉之一。这种“普遍的尺度化法则”研究类型的一个缺点，是大多数尺度化法则

是非条件统计量，然而，至少在金融中，我们对条件概率兴趣更大。在许多情况下，与某个给定的尺度化法则相一致的随机过程生成的数据集合可能太大，以至于对金融来说意义不大。作为一个极端的例子，考虑与中心极限定理(CLT)相一致的随机过程  $\{X_t\}$  的集合。那种特定类型的“普遍的尺度化法则”在金融学中区分各种数据生成机制中的作用有限。以下更详细地解释一下我们的意思。

很多统计和计量经济学以“平方根 N 的中心极限定理”为中心：

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \rightarrow N(0, V), \quad n \rightarrow \infty.$$

这里  $\rightarrow$  是弱收敛； $N(0, V)$  代表零均值且方差为  $V$  的正态分布；而  $\{X_t\}$  是一个有足够的正则性以使中心极限定理能够成立的随机过程。例如  $\{X_t\}$  可以是弱非平稳和弱相关，而中心极限定理仍然是成立的。尽管这样的尺度以诸如假设检验的其他方式在使用，但在不同类型的潜在数据生成机制中，不是一个很有用的区分因素。

在本文中，我们将关注那些产生不是  $N$  的平方根的尺度化机制。尽管这样的尺度化还仅仅是区分不同类型的潜在数据生成过程的一个粗略的区分因素，我们希望中心极限定理以外的不同的尺度，可对什么类型的数据生成过程能产生这种非  $N$  的平方根的尺度具有有用的解释。

Bak 和 Chen (1991) 的研究是这种特定研究类型的一个好例子。他们试图证实一个叫“沙堆”(sandpile) 模型的特定类别的概率单元自动操控 (probabilistic cellular automata)，很好地概括了自然界中遇到的一大类复杂系统。想想一个位于桌子上的一个真实的沙堆，沙子从沙堆上空落到沙堆上。想想“滑沙”(sandslides)，即沙堆到达“临界点”(criticality) 时，由这样的落沙引发的、不同规模的“雪崩”(avalanches)。此外，他们认为沙堆模型表现了象雪崩的规模分布这样的可观测的“功效法则尺度化”(power law scaling)，而象“ $1/f$ ”噪声这样的功效法则尺度化在实际中可以广泛地观测到。他们认为功效法则尺度化对特定沙堆自动操控细节的稳健性是一个“普遍”特性，这使得沙堆自动操控模型成为导致功效法则尺度化机制的一个特别有用的代表。

在经济学中，Scheinkman 和 Woodford (1994) 在一个沿袭沙堆模型的研究路线而建立起来的存货动态模型中，认为局部相互作用和强非线性可以通过前向、后向联系结合起来，使平方根 N 的中心极限定理不能成立。在 Scheinkman 和 Woodford (1994) 一文中，“最终需求”起到了落沙的驱动力的作用。

在相互作用的系统模型中出现了一个相似的主题是接近“相变化”的尺度，在该相互作用系统中，作者认为这种形式的尺度对于待考察的特定模型的细节是稳健的(Ellis(1985), pp.178-9)。

对相互作用系统模型的普遍批评认为，要求外生参数“调谐”以生成非平方根 N 的尺度，可能会被离散选择随机效用理论下的再公式化所削弱。按 Block(1993)的研究思路，在该理论中，选择的强度(“调谐参数”)变为内生的。将选择强度内生所需要做的是使它成为可代替选择的效用之差的函数。

这可能是由于对选择努力的代价和付出这样的努力所得到的效用之间的权衡建模而引发的。对这样的权衡建模的一个容易处理的方式是设立一个二阶段问题，其中，第一阶段选择  $\{P_i\}$  以最大化熵  $E = -\sum p_i \ln(p_i)$  s.t.  $\sum p_i U_i = \bar{U}$ ,  $\sum p_i = 1$ ，而第二阶段选择努力程度  $e$  来最大化  $\sum \bar{p}_i(e) U_i - c(e)$ ，这里  $\bar{p}_i(e)$  是第一阶段选择  $i$  的概率。

这可以看成是将 E.T.Jaynes 的想法改编成一个经济权衡，其中， $\bar{U}(e)$  代表当投入到随机

选择中的努力水平为  $e$  时获得的效用的平均量。参见 Brock (1993) 引用的 Jaynes 的文献以及对最大化熵、离散选择和统计机制间的关系的更多讨论。

无论如何，不管一个人对“调谐”一个外部的参数到“临界点”的观点如何，产生非  $N$  的平方根尺度的相互作用模型，对理解第 3 节描述金融力量在实证研究中导致长期依赖和显然非  $N$  的平方根尺度可能起一定作用。以下讨论对频率的结构和频率的实证建模。这是由不同的频率产生的不同经济力量的想法所推动的。

## 1.2. 基于频率的研究

### 1.2.1. 理论模型

组织对金融中按不同频率构建的基于结构理论的模型和实证/统计模型的讨论是有用的。在最高的频率，例如逐笔交易，肯定成为市场微观结构制度的问题。诸如出价/要价反弹和非同步交易这样的现象肯定显得突出。对制度规则及其对价格发现和波动率的影响，以及高频收益率的时间序列特性的讨论，参阅 Smith 的报告 (1993) 中 Grossman, Miller, Froot, Schwartz 和其他人的研究，以及在 Fiedman 和 Rust (1993) 中 Domowitz 与他的合作者们的研究工作。Domowitz 证实一个他称之为“指令簿长度” (the length of the order book) 的制度性数量在非常高的频率时，在引致收益率、出价/要价差额和波动率的时间序列特性方面起主要作用。

另一个例子，为了明白 S&P500 现金指数 15 分钟频率的自相关函数如何已经在 1983—1989 年间急剧地向接近于零变化及对此所作的解释，读者应该研究 Froot、Gammill、和 Perold 为 Smith 报告 (1990) 所做的工作。他们认为交易成本下降加上象投资组合和期货交易这样的新的交易业务使得价格比以前更加快地反映新的信息。出价/要价反弹的变化或非交易效应的变化导致可预测性下降的可能性。这一可能性在 Froot 笔下做了调整。

关于拍卖理论和市场微观结构制度的实验和理论研究工作 (例如参见 Friedman 和 Rust (1993) 和 Roger Smith 报告 (1990) 中的讨论)，已经表明不同的拍卖系统的绩效会有差异。

我们把 Grossman (1989) 的书中讨论的噪音理性预期模型 (noisy rational expectation models) 应用于从中频到高频的类别。最高频类包括象 Goodhart 和 O'hara (1994) 综述的那些市场微观结构模型以及上面讨论的拍卖制度的差异。对非常高频现象，最近的文献综述有 Goodhart 和 O'hara (1994) 以及 Guillaume 等 (1994)。设计用来分析接近于周频率的金融现象的方法属于中频类。

在本文中，为了组织我们的讨论，我们把市场微观结构看作是以最高的频率运行的 (可能从逐笔到 15 分钟频率)，然而信息到达过程和价格发现本身以次高的频率发生 (可能从 15 分钟频率到日频率)。我们将把“发现了” (discovered) 的价格本身看作是以次高的频率变动。我们也将把象出价/要价反弹和非同步交易看成是 (可能是) 以一个比价格发现本身稍微高些的频率发生。

众所周知，与开盘和收盘相关联的交易量和收益率的波动有“日季节性” (daily seasonality)。这样的日内季节性使时间序列分析出现问题。Anderson 和 Bollerslev (1994) 说，“把传统的时间序列模型 [...] (应用到) 原始高频收益率可能会对收益率波动动态产生错误的推断。[...] 此外，消除季节性看来对揭示收益率的短期和长期成分之间的复杂联系至关重要，揭示收益率的短期成分和长期成分之间的复杂联系，可能有助于解释已经观察到的、日间数据的波动有长期记忆的特征和日内数据与消息到达相关联的短期快速衰减之间的矛盾现象。”

例如，Brock 和 Kleidon (1992) 提出了一个模型来“解释”在交易日内从开盘到收盘之

间的出价/要价差额，并对该模型与其他模型的结论作了讨论。我们把这类现象尽可能看作是以比 Grossman (1989) 的理论更高的频率发生，这样的理论以非对称信息为基础；但是以比 Friedman 和 Rust (1993) 中 Domowitz 的交易制度引致的现象更低的频率发生。

在另一个极端，例如，最低频是 Mehra (1991) 研究的增长频率。在这样的频率下，长期移动在 (i) 技术的变化，(ii) 私人部门的制度变化，(iii) 政府部门的制度变化，(iv) 人口的年龄分布等方面起主要作用。

我们将把设计来分析月份和更低频率数据的方法归入低频类。可以考虑象经济周期的频率甚至更低的频率。例如，我们把欧拉方程和 Altug 和 Labadie (1994)、Campbell、Lo 和 Mackinlay (1993) 以及 Singleton (1990) 所综述的、以消费资产定价模型 (CCAMP) 为基础的方法，以及象 Jog 和 Schaller (1994) 这样的集中于金融约束和均值回复 (mean reversion) 的模型归入低频类。我们也将把基于货币需求模型的结构汇率模型归入低频类，该货币需求模型是 Altug 和 Labadie (1994) 提出的。当然，这些现象中有一些可能以更高的频率运行。在此，要区别它们的边界是非常困难的。

### 1.2.2. 统计模型

在本文中，我们希望阐述处于以结构性方法和“计量经济学”方法为基础的理论边缘上的一些研究工作。我们也希望提出并推动金融计量学中关于设定检验的一个观点，这种观点可能在某种程度上是有争议的。在正式开始之前，我们试着用简单的英语来解释我们的意思。

Singleton (1990) 综述的研究工作和 Duffie 和 Singleton (1990) 近期相关的研究路线中，一个明确的理论经济模型成为统计分析的基本出发点。在 Singleton (1990) 的论文中，大部分分析源自 Lucas (1978) 的纯交换资产定价模型和其他与之相关的模型。Singleton (1990) 认为“相当多种类的代理人价格决定模型都未能很好地描述消费和各种资产收益率的共同运动。” de Fontnouvelle (1995) 综述了各种研究，包括他自己的、把交易成本也考虑在内的研究。潜在的、现实的交易成本看起来是减少了与数据的一些冲突。

在 Duffie 和 Singleton (1993) 中，Brock (1982) 和 Michener (1984) 的基于生产的资产定价模型是统计分析的出发点，而统计分析本身是 McFadden (1989) 以及 Pakes 和 Pollard (1989) 的模拟矩方法的一个动态扩展。

与这样的方法不大相同的是 ARCH 的研究文献，这些文献构建资产收益率的统计模型并进行估计，但这些文献并没有直接从基础理论结构推导出这样的模型。在这里，Singleton (1990) 综述的那类研究工作的纯经济理论基础，在 Bollerslev、Engle、和 Nelson (1994) 文献综述中讨论的“纯统计的”研究工作中，最多是一个背景。

为了举例说明这一点，考虑下面的例子。正象 Altug 和 Labadie (1994) 一书中讨论的大多数资产定价模型产生形如  $p_t = p(y_t)$  的均衡资产定价函数，其中  $y_t$  是系统的低维状态向量。ARCH 类的模型试图去为新生  $\varepsilon_t \equiv p_t - E_{t-1}[p_t]$  建模，其中  $E_{t-1}[X]$  定义为随机变量  $X$  在已知  $t-1$  时信息时的条件期望。考虑一大类 ARCH 模型  $\varepsilon_t \equiv \sigma_t Z_t$ ，其中  $\{Z_t\}$  是一个独立同分布、均值为零和方差为 1、关于零对称分布 (例如正态分布) 的随机变量序列，而  $\sigma_t^2$  ( $\varepsilon_t$  的条件方差) 是过去的  $\varepsilon$  和  $\sigma$  的函数。把这些 ARCH 过程称为“对称的 ARCH 过程”，我们将证明  $\{\varepsilon_t\}$  对称的 ARCH 基本上意味着  $P(\cdot)$  是线性的，对所有过去的  $y$  即有：

$$E_{t-1}[p(y_t)] = p(E_{t-1}[y_t])$$

这可能意味着对诸如 Lucas (1978)、Brock (1982) 和 Duffie 和 Singleton (1993) 使用的资产定价的原始模型施加不合适的约束。例如，在 Brock (1982) 以及 Duffie 和 Singleton (1993) 模型的背景下，这接近于要求效用函数是对数的而生产函数是有多重冲击的柯布一

道格拉斯 (Cobb Douglas) 函数。可能有人不希望原始模型上施加这样的结构约束。无论如何,  $p(y_t)$  是状态变量  $y_t$  的线性函数的隐含是不合适的。我们有

定理 1. 假设  $y_t$  是一维的,  $p_t \equiv p(y_t)$ ,  $p(\cdot)$  是  $y$  的增函数。进一步假定  $\eta_t \equiv y_t - E_{t-1}[y_t]$  和  $\varepsilon_t \equiv p_t - E_{t-1}[p_t]$  (对过去的  $y$ ) 的条件分布是对称的、均值为零、方差是有限的、有唯一的零条件中位数。那么  $p(E_{t-1}[y_t]) = E_{t-1}[p(y_t)]$  对所有过去的  $y$  都成立。

证明: 根据假设,

$$\begin{aligned} \Pr ob\{\varepsilon_t = p(E_{t-1}[y_t] + \eta_t) - E_{t-1}[p(E_{t-1}[y_t] + \eta_t)] \leq 0\} &= 1/2 \\ &= \Pr ob\{\eta_t \leq p^{-1}(E_{t-1}[p(E_{t-1}[y_t] + \eta_t)]) - E_{t-1}[y_t]\}. \end{aligned}$$

现在, 根据假定  $\eta_t$  的条件分布是关于零的对称分布, 因此  $\eta_t$  的条件中位数是零。从而,

$$p^{-1}(E_{t-1}[p(E_{t-1}[y_t] + \eta_t)]) - E_{t-1}[y_t] = 0$$

因此,  $E_{t-1}[p(E_{t-1}[y_t] + \eta_t)] = p(E_{t-1}[y_t])$ 。证毕。

这类命题可以循着上述第一部分的论证, 推广到  $p(y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-L})$ 。尽管 ARCH 模型可以很容易地容纳非对称分布的新生 ( $\varepsilon_t$ ), ARCH 模型的实证应用通常假定新生是对称的。

1

此外, 在 Bollerslev、Engle 和 Nelson (1994) 的评述中, 没有包含要估计的 ARCH 类模型中假定的统计结构, 和施加在效用、生产函数以及资产定价模型的市场制度上的现有结构之间的“逆映射” (inverse mapping) 的研究工作。这一结构促进了 ARCH 类模型的创新我们给出上述这种研究的一个例子。<sup>2</sup>

在日频率, 通常都将收益率、交易量和波动率的运动与信息的到达联系在一起。发展一个与 Singleton (1990) 的研究平行的、以结构为基础的方法, 仍然是一个未来可以研究的题目。例如, Lamoureux 和 Lastrapes (1994) 引用 Gallant、Rossi 和 Tauchen (1992), p.202 下面这段关于以理论为基础的模型的话“...这些模型没有充分发展到可以为日股票市场数据的实证模型设定提供指南。” Lamoureux 和 Lastrapes (1994) 进一步发展了一个日股票收益率和日交易量的“统计”模型。在下面的第 4 节, 我们简要描述一些试图与日股票市场的实证模型相一致的结构建模。

我们相信, 产生计量经济模型的理论模型结构和实际用于估计的计量经济学模型的结构之间的沟壑, 将会随着金融时间序列问题自助法 (bootstrap) 和模拟矩过程动态方法的扩展而消失。象 Judd 在将要出版的书 (1995) 中讨论到的计算方面的进展将会起关键作用。

### 1.3. 本文的组织

本文的组织如下。第一节是引言。第 2 节讨论几个非线性的检验, 包括 Subba Rao 和 Gabr (1980)、Hinich (1982) 的双谱偏度检验以及 Brock、Dechert 和 Scheinkman (1987) 的 BDS 检验。应指出的是, 这些检验是不一致的, 存在着这些检验都不能检测出来的偏离线性的现象, 随后是对某些一致性检验的讨论。然而, 在使用这些检验时, 普遍拒绝资产收益率是线性的。由于拒绝线性是如此频繁, 看来在金融中主要的问题不是不能检测出线性偏离, 主要的问题是发现拒绝的原因。讨论转向收益率分布的肥尾是拒绝的原因的可能性。这一讨论推

<sup>1</sup> 正态分布、学生 t 分布、学生广义 t 分布和广义误差分布似乎是使用更普遍分布。一个例外是 Engle 和 Rivera (1993) 的半参数 ARCH 模型。

<sup>2</sup> 注意可以通过检验假设  $\Pr ob(S_t = 1) = 0.5$  (其中  $S_t = \text{sgn}(\varepsilon_t)$ ,  $\text{sgn}(x)$  等于  $x$  的符号) 来检验新生值分布的对称性。即使新生序列  $\{Z_t\}$  是一个非独立的过程, 在一些更一般的 ARCH 表达式中有这种情况——Bollerslev, Engle 和 Nelson (1994) 一文中有弱-ARCH 的结构——这样的结果仍然是成立的。

动了厚尾度的估计方法的发展。在矩条件适用于金融学应用中很常见的肥尾数据的情况下，讨论将给出一些检验拒绝零假设太频繁的证据。

第 3 节探讨可能的非平稳性和长期依赖性，例如资产收益率的长期记忆。考虑到最近金融学术界和一般金融文章都对长期记忆颇有兴趣，我们对收益率和收益率波动的长期记忆进行一个相当完整的讨论。覆盖的题目包括分数单整广义自回归条件异方差（Fractionally Integrated Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity, FIGARCH），一个类似（FIGARCH）、随机波动率模型（Stochastic Volatility Models）、赫斯特指数（Hurst Exponents）和重标极差统计量（Rescaled Range statistics）。对长期依赖性进行重标极差检验（rescaled range tests）可能会被象 Hamilton 和 Susmel（1994）的 SWARCH 模型那样的短期依赖马尔可夫转换随机过程（short term dependent Markov switching stochastic processes）所愚弄。但是赫斯特指数本身对这种形式的短期依赖是更稳健的。第 4 节简短讨论非对称信息理论的使用以形成对收益率、收益率的波动和交易量的自相关和互相关这些类型化（stylized）的特征的可能解释。进一步地，我们将展示被大家接受的不对称信息理论的一个修正，能够用以解释看起来不太可能用消息的改变来说明的收益率、收益率波动和交易量的突变。我们在本文末尾进行一些总结性的评论。

## 2. 股票收益率的非线性

我们应该把“非线性”这个词的意思限定在这样的方法和模型，即不能通过改变单位或对比条件均值更高阶的条件矩进行类似于线性方法的扩展，以简化成线性来分析。我们必须把我们的意思定义为“随机线性”。

这里遵循 Brock 和 Potter（1993，并且参阅 Hall 和 Heyde 和 Priestley），把一个充分正则化以使它具有单边（因果的）Wold 表达式的随机过程称为零均值严平稳的随机过程，如果随机过程  $\{Y_t\}$  的表达式是  $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ ，这里  $\{\varepsilon_s\}$  独立同分布（鞅差分序列），那么该过程是独立同分布（差分序列）线性的。如果

$$E[\varepsilon_s | \varepsilon_{s-1}, \varepsilon_{s-2}, \dots] = 0$$

对所有的  $s$  都成立，我们就说  $\{\varepsilon_s\}$  是一个鞅差分序列（与过去的  $\varepsilon$  生成的  $\sigma$ -代数有关）。

注意到条件均值为零的 GARCH 模型是鞅差分序列线性的（mds-linear）。也注意到既然 Wold 表达式本质上是无法证伪的（除非检验非平稳性本身），如果过程  $\{Y_t\}$  有一个误差项不相关的移动平均表达式，那么称这样的严平稳过程为线性是没有用处的。由于这个原因，引入独立同分布（鞅差分序列）线性的概念。还要注意的是鞅差分序列线性意味着均方误差（Mean Squared Error）最小的预测是最佳线性预测。

### 2.1. 非线性的拉格朗日乘子检验和混成检验（portmanteau tests）

文献中可获得各种各样的非线性检验。我们可以将这些检验大致分成两类，即设计检验时心中有一个备择假设的检验——如拉格朗日乘子类检验（劳的得分检验（Rao's score test）——和混成检验。Granger 和 Terasvirta（1993）说明许多已有的非线性检验都有一个拉格朗日乘数形式的解释。这类检验包括 Tsay（1986）检验，Ramsey（1969）以及 Thursby 和 Schmidt（1977）的 RESET 检验，Lee、White 和 Granger（1993）的神经网络检验，White（1987）的动态信息检验，对 ARCH 效应的 LM 检验（Engle（1982）以及 McLeod 和 Li（1984）），

Saikkonen 和 Luukkonen (1988) 对双线性备择假设和指数自回归模型的 LM 检验, 以及 Luukkonen、Saikkonen 和 Terasvirta (1988) 对平滑转换自回归模型的 LM 检验。

两个检测线性的混成检验是 Subbs Rao、Gabr (1980) 和 Hinich (1982) 的双谱检验 (bispectrum test) 以及 BDS 检验 (1987)。这两个检验属于少数一些没有拉格朗日乘数型检验解释的非线性检验, 而且已知它们比许多其他的非线性检验具有更高的功效。这最后一个特征已经使这两个检验相当受从业者的欢迎。

双谱检验是基于这个事实: 零均值线性过程  $y_t$  的偏度函数为

$$\frac{|B(\omega_1, \omega_2)|^2}{S(\omega_1)S(\omega_2)S(\omega_1 + \omega_2)} \quad (2.1)$$

对所有频率数对  $(\omega_1, \omega_2)$  是常数。  $B(\omega_1, \omega_2)$  是功效双谱 (power bispectrum) —— 三阶累乘  $E[y_t y_{t+h} y_{t+k}]$  的傅立叶变换, 而  $S(\omega)$  是功效谱 (power spectrum) ——  $E[y_t y_{t+k}]$  的傅立叶变换。 Hinich (1982) 的线性检验着眼于不同频率下偏度函数估计的离中趋势。

BDS 检验是时间序列  $y_t$  的  $N$  个观测值的 Grassberger—Procaccia 相关积分 (correctation integral)  $C_{\delta, m} = \left(\frac{N}{2}\right)^{-1} \sum_{1 \leq s \leq t \leq N} \sum \chi_{\delta} (\|Y_t^m - Y_s^m\|)$  的函数, 其中  $Y_t^m \equiv (y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+m-1})$ ,  $\|\cdot\|$  是

最大值范数,  $\chi_{\delta}(\cdot)$  是当  $|x| < \delta$  时等于 1, 否则等于 0 的对称指数核 (symmetric indicator kernel)。 BDS (1987) 指出, 如果  $y_t$  是独立同分布, 那么当  $N \rightarrow \infty$  时  $C_{\delta, m} = (C_{\delta, 1})^m$ , 而统计量

$$BDS_{\delta, m} = \sqrt{N} \frac{C_{\delta, m} - (C_{\delta, 1})^m}{s_{\delta, m}} \quad (2.2)$$

在  $\delta > 0$  时依分布收敛于一个标准正态分布, 而  $m = 2, 3, \dots, s_{\delta, m}$  是在独立同分布零假设下  $\sqrt{N}(C_{\delta, m} - C_{\delta, 1}^m)$  的渐进标准差的估计。注意到  $C_{\delta, m}$  是概率  $\Pr\{\|Y_t^m - Y_s^m\| < \delta\}$  的一个估计量, 而  $C_{\delta, 1}$  是估计概率  $\Pr\{|y_t - y_s| < \delta\}$  的一个估计量, 解释这个检验是简单的。在独立同分布的零假设下

$$\begin{aligned} \Pr ob\{\|Y_t^m - Y_s^m\| < \delta\} &= \\ \Pr ob\{|y_t - y_s| < \delta, \dots, |y_{t+m-1} - y_{s+m-1}| < \delta\} &\cong \\ (\Pr ob\{|y_t - y_s| < \delta\})^m & \end{aligned}$$

那就是说, BDS 检验在适当区间内估计联合分布之差和边际分布之积。注意这个类比是不完全的, 因为在  $y_{t+i}$  和  $y_{s+j}$  之间可能会有一些重叠。

如果将 BDS 检验用于估计线性模型的残差, BDS 检验就成为线性的混成检验。在零假设模型参数的  $\sqrt{N}$  一致估计有可能存在的情况下, 检验的零假设分布不受这个过程的影响。这个结果的证明在 BDS (1987) 最初的论文中, 在 Brock、Hsieh 和 LeBaron (1991) 以及

de Lima (1995) 的论文中也都有。前两篇文章用指数核  $\chi_\delta(\cdot)$  的连续近似导出了它们的结果。Lima (1995) 采取的方法是把 Randles (1982) 的结果一般化用以直接处理  $\chi_\delta(\cdot)$ 。特别地, 这些结果显示, 如果数据的生成过程是一个由有限二阶矩的独立同分布新生(innovation)驱动的 ARMA (p, q) 模型, ARMA 的参数估计过程不会影响 BDS 检验的零假设分布。不仅如此, 如果线性过程具有由独立同分布新生驱动的自回归表达式, 新生分布是稳定分布族成员, 这个结论仍然有效。那就是说, 将 BDS 统计量用于一大类有限方差线性过程时, 具有无多余参数(nuisance parameter)这一特性——参阅 de Lima (1995)。<sup>3</sup>

尽管刻画大多数非线性拉格朗日乘数型检验的局部功效特性 (local power properties) 相对容易——例如可参阅 Granger 和 Terasvirta (1993), 双谱检验和 BDS 检验的在备择假设下的分布是未知的。由于这个原因, 相当数量的论文已经用蒙特卡罗模拟的方法研究这些检验的功效特性, 参阅 Brock、Hsieh 和 LeBaron (1991), Lee、White 和 Granger (1993) 以及 Barnett 等 (1994)。正如所预期的那样, 对应的拉格朗日乘数检验看来优于那些零假设的局部备择检验。然而, 这些检验对与零假设的其他偏离通常没有很高的效力, 而 BDS 检验看来几乎对每个与零假设的偏离都相当有效力——例如, 象 Brock、Hsieh 和 LeBaron (1991) 证明的那样, 与可选择的 ARCH 相比, BDS 的效力很接近于 Engle (1982) 的拉格朗日乘数检验。这点对非线性随机过程和非线性确定性过程、混沌过程等可选择过程都是成立的。

最后, 注意到尽管 BDS 统计量是平稳时间序列为独立同分布线性(iid-linear)的一个很自然的检验, 双谱检验可以用来检验假设——序列  $\{Y_t\}$  有单边表达式 (one-sided representation)

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \text{ 其中 } \varepsilon_t \text{ 是对称分布的鞅差分序列, } E|\varepsilon_t^3| < \infty. \text{ 不失一般性, 假设 } E[Y_t] = 0$$

对所有 t 都成立。象在 Priestley (1981) 中一样, 计算三阶累乘的期望  $\mu(s_1, s_2) \equiv E[Y_t Y_{t+s_1} Y_{t+s_2}]$ 。

这需要考察形如  $E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+s_1} \varepsilon_{t+s_2}]$  的条件。 $\{\varepsilon_t\}$  的 mds 的特性使得我们可以证明除  $k=l>0$  之

外,  $E[Y_t Y_{t+k} Y_{t+l}] = 0$ 。双谱检验的一个版本通过排除  $E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}^2]$  ( $k>0$ ) 中有关项的幂, 也许

可用于检验一般的鞅差分序列特性。参阅 Barnett 等 (1994, 特别要参考 Hinich 和他的合作者们的工作) 对双谱检验的讨论。对于一大类对称 ARCH 过程, 可以证明对所有的  $k>0$ ,

$E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}^2] = 0$ 。考虑 GARCH (p, q) 类过程,  $\varepsilon_t = \sigma_t Z_t$ , 其中,

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_q \sigma_{t-q}^2$$

$$\{Z_t\} \sim \text{iid}(0, 1),$$

而 Z 是关于原点的对称分布。计算显示, 对 GARCH (p, q) 过程, 对所有的 t, k 都有

$E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}^2] = 0$ 。因此, 对 GARCH(p,q)驱动的线性过程, 所有三阶累乘的期望都是零<sup>4</sup>。因此

GARCH(p,q)驱动的线性过程的双谱都是零。换句话说, 任何由 GARCH(p,q)新生驱动的、

<sup>3</sup> 如果将检验用于误差项可加的数据生成过程  $y_t = G(X_t, \beta) + U_t$ , 其中  $\beta$  是参数向量,  $X_t$  是满足混合性质 (mixing property) 的一个时间序列 (向量), BDS 检验没有多余参数的特性, 仍然是成立的。不仅如此, 如果将这个检验用于  $\ln(\hat{U}_t^2)$ , 其中  $\hat{U}_t$  是估计残差, 这个特性对于一些  $y_t = G(X_t, \beta)U_t$  类的乘法模型仍然成立。这最后一个结果表明, 通过对残差进行适当变换, BDS 检验的零假设渐近分布不受从 GARCH 和 EGARCH 过程产生的估计残差的影响。分析和模拟的结果, 参阅 Brock 和 Potter (1993) 以及 de Lima (1995)。

<sup>4</sup> 我们假定 Z 和  $\varepsilon$  都有有限的绝对三阶矩。

有 Wold 类表达式的平稳过程的双谱都是零。在金融应用中，既然收益率的条件均值相对于条件方差是小的，这表明对由 GARCH(p,q) 新生驱动的线性模型，可能有一个有用的筛选检验。然而，在实施这个有用的研究策略时，可能会有困难。

拟合金融收益率的模型，新生倾向于有肥尾——参阅 2.3 部分。de Lima (1994a) 指出，对肥尾数据来说，双谱检验的基准是不好的 (badly sized)。特别地，他指出双谱检验需要有限六阶矩成立。许多金融数据集似乎没有有限的四阶矩，远低于六阶矩，而且当它的尾指数的选择与金融数据集中的估计值相容时，双谱检验倾向于太频繁地拒绝帕累托独立同分布 (Pareto IID) 零假设。因此，这提出，对于由 GARCH(p, q) 新生驱动的线性过程实施上述的混成检验会有一个潜在的、实践上的问题。尽管如此，我们相信研究双谱检验变形 (variation) 的使用是有益的。

例如，处理 de Lima 尺度问题的一个可能的策略是，在所考察的收益率数据属于 GARCH(p,q) 类的零假设下，对双谱偏度统计量进行自助。当然，对自助法来说，这种应用远远超出了我们目前能够发现的、将自助法用于渐近分布理论的范畴 (参阅 LePage 和 Billard (1992), Leger、Politis 和 Romano (1992), Li 和 Maddala (1995))。尽管关于“移动块自助法” (moving block bootstrap) 已经有许多的研究，但在象 GARCH 这样的参数化时间序列波动率模型下，对感兴趣 (至少经济学家感兴趣) 的数量的零假设分布进行自助法研究看来还很少。

## 2.2. 线性的一致检验

需要指出的是，BDS 检验和双谱检验都不是非线性的一致检验，那就是说，有已知的对线性的偏离，两种检验方法的功效都为零。Dechert (1988) 提出了一个 BDS 检验没有检测效力依赖过程 (dependent process) 的例子。此外，有些象 GARCH 这样的非线性过程展示出平坦的偏度函数。检测线性的双谱检验相对于 GARCH 过程的渐近功效 (asymptotic power) 为零，因为该检验不能辨识出平坦偏度函数后面的非线性。<sup>5</sup>

Bierens (1990) 提出了一个一致条件矩检验 (consistent conditional moment test)。该检验与 Lee、White 和 Granger (1993) 描述的神经网络检验密切相关，而且可以用作检验均值线性的一致性检验。检验的零假设可以定义为  $E[y | X] = X' \beta$  几乎必定 (almost surely, a.s.)

成立，其中  $(y, X)$  是一个定义于  $R \times R^k$  空间的独立同分布随机向量，而  $\beta$  是一个  $k \times 1$  的参数向量。另一种可选择的做法是，可以定义随机变量  $u = y - E[y | X]$  并且检验假设  $E[u \psi(X)] = 0$ 。对任何函数  $\psi(X)$ ， $u$  和  $X$  的均值相互独立隐含着  $E[u \psi(X)] = 0$ 。Bierens

指出选择  $\psi(X) = \exp(s' \phi(X))$  就产生了一个一致条件矩检验。这里  $\phi^*$  是来自  $R \times R^k$  空间一个任意有界的一一映射 (one to one mapping)，而  $s \in S$ ，这里  $S$  是  $R^k$  空间的某个子集。de Long

(1992) 把 Bierens 的结果拓展成一个框架。这个框架允许数据依赖 (data dependence)，允许  $y_t$  的条件期望依赖于无限数量的随机变量，也就是  $y_t = E[y_t | Z_{t-1} Z_{t-2}, \dots] + u_t$ ，其中  $z_t = (y_t, X_t)$ 。换句话说，在线性性的零假设下，扰动项  $u_t$  是一个鞅差分序列。

<sup>5</sup> 已经有人提议，对这样一类过程，可以用更高阶的基于多谱的检验来检测非线性。这样的检验对样本容量的要求看来极其高——参阅 Barnett 等 (1994)。

\*原书为  $\Phi$ ，有误——译者注。

实际完成这个一致条件矩检验面临着一些困难。首先，关于这个检验的基准（size）和功效特性，我们所知不多。特别是，不同的映射  $\phi$  可能对检验的小样本特性有显著的影响。然而，从分布的观点看， $s$  的选择是一个更微妙的问题。通过考虑过程的某个泛函

$$M(s) = N^{-1/2} \sum_{i=1}^N ((y_i - X_i' \hat{\beta}) \exp(s' \phi(X)))$$

可以得到一致性。 $M(s)$  可以看成是在  $R^k$  的一个紧子集（compact subset）中的连续函数空间的随机元素。Bierens 提出另外两种可供选择的、从经验过程（empirical process） $M(s)$  来构建一致性检验的方法。第一种方法（Bierens 1990，定理 3，P1450）导出一个统计量，统计量的渐近分布函数依赖于数据的分布。因此，每次将检验应用到不同的数据集时都要用模拟的方法取得检验统计量的临界值。第二种方法（Bierens 1990，定理 4，P1451）推导出一个易处理的零假设分布，但是最终检验统计量对样本的大小是不连续的。

文献中也提出这个条件矩检验的其他一些替代检验。Woodridge（1992）提出了一个检验，比较零假设模型的最小二乘估计和一个备择模型的紧近似（compact approximation）的筛估计量（sieve estimator）——例如 White 和 Woodridge（1991）。应注意的是，备择假设定义了一个无限维集合。因此，当样本容量增大，筛估计量必须定义在一个维度不断增大的空间上。类似地，de Jong 和 Bierens（1994）考虑一个一致卡方（ $\chi^2$ ）检验，其中用序列展开级数近似代替（可能）错误设定的条件均值函数。

Hong 和 White（1995）也提出一致设定检验，该检验比较  $E[y|X]$  的最小二乘估计和非参数估计——具体说来是傅立叶序列（Fourier series）和回归样条（regression splines）。直接比较参数估计和非参数估计的一个问题是，如果使用常见的  $\sqrt{N}$  进行标准化，那么导出的检验统计量依概率收敛到零——参阅 Lee（1988）。因此，以前的研究工作通过使用如 Lee（1988）使用的加权法、Yatchew（1992）使用的样本分割法（sample splitting），或通过防止非参数模型嵌入（nest）参数模型——Woodridge（1992），避免了这样的退化。Hong 和 White（1995）一文的新颖之处在于，他们探讨了这样的退化并提出了两个统计量，这两个统计量在错误设定的情况下比标准的  $\sqrt{N}$  率（standard  $\sqrt{N}$  rate）以更快的速度发散。

Bradley 和 McClelland（1994a,b）对 Bierens 检验提出了一个修正，这个修正在一致条件矩估计类的检验中是一个（渐近）最有功效的检验。令  $\hat{u}$  为模型  $y_i = X_i' \beta + u_i$  的最小二乘估计的残差，其中观测值  $\{(y_i, X_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$  是来自分布函数  $F(y, x)$  的一个随机样本，满足  $E[y|X] = \Theta' X$ 。Bradley 和 McClelland（1994a）证明  $\psi(X) = E[\hat{u}|X]$  是在有界函数集合中使  $E[\hat{u}\psi(X)]$  最大化的函数。这保证了一致性——只要  $E[\hat{u} \exp(s' \phi(X))]$  不是零， $E[\hat{u}E[\hat{u}|X]]$  也不等于 0。 $E[\hat{u}|X]$  是用由相互确认（cross-validation）决定带宽选择

（bandwidth selection）的非参数核方法（nonparametric kernel methods）估计的。为了避免与这个过程相关联的过度拟合问题——过度拟合将会导致基准扭曲（size distortions）——Bradley 和 McClelland 用重复抽样技术来估计残差。如果条件方差随时间变化，不是常数，

对时间序列的应用来说，这可能是一个潜在的问题。此外，在错误设定的条件均值函数可能包含无限个变量的时间序列背景下，用非参数核方法来估计备择假设下的  $E[\hat{u} | X]$  可能是不合适的。

### 2.3. 非线性和肥尾分布

推导统计检验的（渐近）零假设分布需要对生成数据的分布性质作技术性的假定。特别地，通常要施加一些矩条件以使得中心极限定理能够应用于所要研究的检验统计量。用一个简单的检验，检验随机变量  $X$  的均值是否等于  $\mu_0$ ，可以相当清楚地说明这个问题。引进两类辅助性的假设：数据中时频依赖（temporal dependence）的类型和矩条件，如果可以假设抽样是随机的，二阶矩有限就保证了 Lindberg-levy 中心极限定理可以用于样本均值分布的近似。

在推导非线性检验的渐近分布时，需要作同样类型的辅助性的矩条件假定。第 3 节总结的所有检验假定数据是由至少有有限四阶矩的分布生成的。唯一的例外是 BDS 检验——参阅 de Lima (1994a)。这是将使 BDS 统计量收敛于一个正态分布的随机变量所需的矩条件应用于指示核(indicator kernel)  $\chi_\varepsilon(\cdot)$  的结果。因为  $\chi_\varepsilon(\cdot)$  是一个二元变量，它所有的矩都是有限的。然而，因为 BDS 检验是用于 ARMA (p, q) 的估计残差，而且这个估计过程涉及到  $\sqrt{N}$  一致估计 ( $\sqrt{N}$ -consistent estimation) 技术，施加一些矩条件仍然是有必要的。正如前面提到的，有限方差、独立同分布的新生是 ARMA (p, q) 模型的参数估计是一致估计的充分条件。

非线性检验的稳健性对矩条件失效 (moment condition failure) 与金融时间序列特别有关联。股票收益率和其他金融资产收益率是肥尾分布，这是得到广泛确认的类型化事实 (stylized fact)。金融时间序列表现出超峰度。不仅如此，Mandelbrot (1963) 提供的证据表明，对于商品价格的变化，无条件二阶矩可能不存在。这使得他提议用稳态分布族作为高斯模型的另一个选择。需要指出的是，尽管正态分布本身是一个稳态分布，它是稳态分布族中唯一的一个有有限二阶矩 (和其他更高阶矩) 的成员。

属于稳态分布族的随机变量有一些不错的理论特性。例如，它们是唯一一个具有吸引域 (domains of attraction) 和在加法下闭合的分布族<sup>6</sup>。然而，它们作为一个金融时间序列模型的有用性已经受到了强烈的挑战。已经有人提出其他刻画股票收益率的边际分布特征的替代模型——例如 Blattberg 和 Gonedes(1974)提出的学生  $t$  分布，Clark (1974) 提出的混合模型 Hsu, Miller 和 Wichern (1974) 提供的证据表明，方差不平稳可能使 Mandelbrot 的统计方法偏向于支持稳定分布。对这些不同方法的比较和在估计分布时涉及到的统计方法的有效性讨论，其他文献除外，关于股票收益率的，有 Fielitz 和 Rozelle(1983)，Akigary 和 Booth (1988)，以及 Akigary 和 Lamoureux (1989)；关于汇率的，有 Boothe 和 Glassman(1987) 以及 Koedijk、Schafgans 和 de Vries (1990)。

更近一段时期以来，Jensen 和 de Vries (1991) 以及 Loretan 和 Phillips (1994) 采用更直接的方法以确定矩是否存在。不是试图去刻画整个分布的特征，这两篇论文集中于分布的尾，因为矩的存在最终是由分布密度函数的尾的衰减速率决定的。Loretan 和 Phillips (1994) 对一

<sup>6</sup> 详尽的文献综述，参阅 Zolotarev (1986)；近期的发展，参阅 Samorodnitsky (1994)；对金融中的应用的文献综述，参阅 McCulloch (1996)。

组股票市场收益率和外汇收益率给出了最大矩指数  $\alpha = \sup_{q>0} E|X^q| < \infty$  的估计值。参数  $\alpha$  是用 Hill(1975)和 Hall (1982) 发展的程序估计的。令  $X_1, X_2, \dots, X_N$  是一个关于 (渐近) 帕累托类 (Pareto-type) 尾部的分布的独立观测值样本。令  $X_{N,1}, X_{N,2}, \dots, X_{N,N}$  代表经过排序的样本值。那么, 对于某个正整数  $s$ , 最大矩指数可以由下式得到一致估计:

$$\hat{\alpha}_s = \left( s^{-1} \sum_{j=1}^s \ln X_{N,N-j+1} - \ln X_{N,N-s} \right)^{-1}$$

令  $S$  随样本容量的增大而增大 (尽管  $s$  以比样本容量的增长速率更低的速率增长), Hall (1982)指出,  $s^{1/2}(\hat{\alpha}_s - \alpha)$  收敛于一个分布为  $N(0, \alpha^2)$  的随机变量。Loretan 和 Phillips(1994) 的估计表明, 方差是有限的, 但是四阶矩可能不存在。换句话说, 这些结果为拒绝高斯模型提供了很强的证据, 但是也不太支持稳态分布模型。

然而, McCulloch (1995), Mittnik 和 Rachev (1993)以及 Pagan (1995) 认为, Loretan 和 Phillips 使用的估计量, 不是资产收益率的无条件分布的尾部形状的一个很可靠的测度。首先, 选择不同的  $s$ ——统计量的阶数——看来产生的最大矩指数的估计  $\alpha$  显著不同, 尤其是观测值的个数不是非常多时, 更是如此。然而, 对相当大的样本容量, Loretan(1991)的模拟表明, 如果  $s$  不超过样本容量的 10%, 那么  $\hat{\alpha}_s$  是  $\alpha$  的稳健估计量。这个经验规则首先是由 DuMouchel (1981) 提出来的。第二, 尾指数估计值是最大似然估计, 它假定样本是从有帕累托尾的总体中抽取出来的。Mittnik 和 Rachev(1993)由 Weibull 分布——该分布的  $\alpha = \infty$ ——生成的独立同分布数据做了一个小型模拟研究, 报告的最大矩指数的均值估计值为 3.785。McCulloch(1995)提出证据表明, Jansen 和 de Vries(1991)以及 Loretan 和 Phillips(1994) 报告的参数估计值与从  $\alpha < 2$  的稳态分布生成的数据获得的尾部指数的估计值是一致的。第三, Hall(1982)提供的收敛结果假定抽样是随机的。Pagan (1995) 报告的模拟结果表明, 如果数据是由一个 GARCH 过程生成的,  $\hat{\alpha}_s$  的标准差明显比数据是独立同分布情形时预测的值要大。注意 ARCH 的过程生成肥尾分布数据: deHaan, Resnik, Rootzen 和 de Vries(1989) 指出, ARCH 变形的无条件分布有帕累托尾, 而 de veries(1991)提出了一个 GARCH 类模型, 在该模型中, 无条件分布是稳态分布。此外, 对高频股票收益率数据的 ARCH 模型的估计, 产生的参数估计通常隐含着四阶矩不存在。Nelson(1990)证实一个 IGARCH (1, 1) 模型, 尽管严平稳, 却没有有限方差。

当矩条件失效时, 非线性检验的结果是 de Lima(1984)探究的一个问题。从渐近理论的观点来看, Lima 指出当矩条件失效时, 非线性检验的分布变成了非标准分布。作为一个例子, 对于没有有限四阶矩的独立同分布序列, Lima 证实, 从由这些观测值数目的过程取前  $h$  个自相关系数的平方和, 进行正规化, 不能收敛于一个非退化的随机变量 (参阅 de Lima (1994a), 定理 1。)换句话说, 对这种类型的过程, McLeod-Li 统计量渐近地衰减为零<sup>7</sup>。

De Lima(1994a)的模拟实验表明, 大多数非线性检验的行为, 与为 McLeod-li 检验推导出来的渐近结果的预测是一样的。特别地, 这些检验的抽样分布表现为在原点附近有一个极点 (pole)。这可能表明, 在矩条件失效且检验的统计量没有适当的尺度化, 经验的基准将总是

<sup>7</sup> 注意 McLeod-Li 统计量的一个适当尺度 (appropriated scaled) 的形式收敛于定义得好 (well defined) 的随机变量, 尽管极限随机变量的分布不是卡方分布, 而且收敛的速率比标准形式要慢。

低于检验的名义基准。然而，模拟实验也揭示检验的方差有可能极大，使检验统计量产生相当大量的大数值。在矩条件失效的极端情形下，这个效应尤为显著。此外，设计对条件方差的错误设定有最大功效的检验以及双谱检验，似乎对矩的不存在特别敏感<sup>8</sup>。总之，看来对矩条件失效——无论是渐近分布还是抽样分布——唯一一个稳健的检验是 BDS 统计量。

De Lima (1994a) 用列于 CRSP 磁盘中 1991 年单个股票文件中的 2165 支股票收益率的样本，研究了非线性与矩条件失效的关系。样本的  $\hat{\alpha}_s$  中位数值为 2.8，超过 95% 的估计值大于 2（有限方差）而小于 2% 的估计值大于 4。将非线性用于随机搅合序列（randomly shuffled series），结果与模拟实验相当类似。这个实证研究也表明，股票收益率非线性的证据，不能全部都归结于非线性检验对矩条件失效的不稳健。然而，De Lima (1994a) 的结果显示，在涉及肥尾数据的情况下，这些非线性检验中有一些检验不是非常可信。

## 2.4. 非线性检验的其他话题

### 2.4.1. 非线性和非平稳性

资产收益率的无条件分布的矩是常数，通常是许多时间序列模型——包括象 ARCH 这样的波动率过程的假定。然而，在新的金融产品和新的技术工具已经引入到金融市场的速度一定时，特别是当考虑的时间相对较长时，存在结构变化（因此缺乏平稳性）的情形看来相当强劲。例如，Pagan 和 Schwert (1990) 以及 LoreTan 和 Phillips (1994) 拒绝股票收益率是协方差平稳的假设。因此，可特别关注的是，确定发现的非线性是否可归因于数据的非平稳。

关于 ARCH 模型，Diebold(1986)以及 Lamoureux 和 Lastrapes(1990)认为，无条件方差的改变可以解释普遍发现的、条件方差的持续性。Simonato(1992) 用 Goldfeld 和 Qnardt(1973) 转换回归(switching-regression)法，把有状态变化的 GARCH 过程应用到一组欧洲外汇汇率中，发现考虑结构性突变大大减少了 ARCH 效应的证据。另外试图反映数据中存在几个波动时期这一想法的模型是 Cai(1994)以及 Hamilton 和 Susmel(1994)的马尔可夫转换 ARCH 模型(Markov switching ARCH, SWARCH)模型<sup>9</sup>。

股票收益率具有无条件方差且离散变化的非平稳过程的特征，可以追溯到 Hsu, Miller 和 Wichern(1974)。Hinich 和 Patterson (1985) 向这个观点发起了挑战，支持另一个认为股票价格是非线性随机过程的实现的假设。他们认为非平稳将使用于分析的双谱检验倾向于接受线性性。在检验统计量清楚地拒绝这个假设的情况下，他们抛弃了认为 1962 年 7 月到 1977 年 12 月期间的股票日收益率非平稳性的假设。Hsieh(1991) 用 BDS 检验，通过子样本分析和观察有不同（更高）频率的数据，拒绝了结构变化是拒绝线性性的原因的假设。因为对所有不同的子样本和所有不同的频率，BDS 检验都拒绝零假设，Hsieh 得出结论认为：“[...] 不太频繁的结构变化不太可能是独立同分布被拒绝的原因[...]”。非线性与非平稳性的区别是 Inclan(1993)讨论的中心，Inclan 提出了一种区分无条件方差的变化和随时间变化（time-varying）的条件方差的非参数方法。

De Lima (1994b) 用一个一般化的 BDS 检验来研究拒绝股票市场收益率的线性性是否是由于数据的非平稳性。这篇文章利用 BDS 统计量的正规化部分和(normalized partial sum)

<sup>8</sup> 双谱检验看来对矩条件失效问题特别敏感。de Lima (1994a) 报告的模拟实验表明，对于从满足

$$(P_\alpha) \begin{cases} P(X > x) = 0.5(x+1)^{-\alpha}, x < 0 \\ P(X < -x) = 0.5(x+1)^{-\alpha}, x > 0 \end{cases}$$

帕累托族的分布产生的独立同分布序列。 $\alpha = 1.5$ （最大矩指数）和 5000 个观察值，1% 的单测检验有 60% 的情况拒绝独立同分布零假设。对在 2 和 6 之间的  $\alpha$  值，发现了类似大小的 I 类错误。

<sup>9</sup> 对方差持续性和 SWARCH 模型的一个更一般的讨论，参阅第 3 部分。

收敛于标准的布朗运动这一事实，分析 1980 年 1 月至 1990 年 12 月之间的普通股收益率指数，发现在对整个时期用 BDS 统计量的情况下，从 1987 年 10 月 15 日到 1987 年 11 月 20 日这段时期，它对拒绝非线性起极其有影响的的作用：对任何开始于 1980 年 1 月，在 1987 年 10 月 15 日前的任何日期结束的子样本，BDS 检验无法拒绝线性性的零假设。注意到 Diebold 和 Lopez(1995)用收益率的平方的自相关函数，得出结论说，在 80 年代股票收益率有 GARCH 效应的证据也较小。然而，de Lima(1994b)的结果也表明，1987 年 10 月以后，看来非线性在股票指数的动态中起积极作用。

#### 2.4.2. 其他非线性识别

尽管它们作为非线性的一般检验是有用的，零假设被上述两个混成检验中的任何一个拒绝，却很难使应用研究人员从非线性的实际性质找到拒绝零假设的理由。一个和 BDS 检验紧密相关的检验，归功于 Savit 和 Green (1991) 以及 Wu, Savit 和 Brock(1993)，在理解导致零假设被拒绝的非线性的性质方面，特别引起关注。不依赖于无条件概率的估计，这两篇文章提出了一个用条件概率表述的序列相关积分 (correlation integral) 类估计量的检验。

$$\begin{aligned} \text{Pr ob}\{A_{t,s} | A_{t-1,s-1}\} &= \text{Pr ob}\{A_{t,s}\} \\ \text{Pr ob}\{A_{t,s} | A_{t-1,s-1}, A_{t-2,s-2}\} &= \text{Pr ob}\{A_{t,s} | A_{t-1,s-1}\} \\ &\vdots \\ \text{Pr ob}\{A_{t,s} | A_{t-1,s-1}, \dots, A_{t-k,s-k}\} &= \text{Pr ob}\{A_{t,s} | A_{t-1,s-1}, \dots, A_{t-k+1,s-k+1}\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中， $A_{t,s} = \{(y_t, y_s) : |y_t - y_s| < 0\}$ ，在独立同分布假设下，这些等式都是成立的，根据条件概率的定义，可以证明，这些条件概率可以用相关关系积分数量 (correlation integral-type quantities) 来估计。Savit 和 Green (1991) 的见解是，在备择假设下，这些条件概率可以用来检测哪个滞后时频依赖 (lag temporal dependence) 是最强的，这类分析对马尔可夫过程特别有意义。马尔可夫过程在非参数时间序列分析中，被广泛使用——例如 Robinson(1983)，以及 Gallant, Rossi 和 Tauchen(1993)。其他用来识别非线性时间序列过程的方法，包括 Auestad 和 Tjöstheim(1990)，最终预测误差准则的非参数形式，Tjöstheim 和 Auestad(1994)以及 Granger 和 Lin (1994) 的共有信息系数 (相对熵)。

$$\delta(f, f_x, f_y) = \iint f(x, y) \log \left\{ \frac{f(x, y)}{f_x(x)f_y(y)} \right\} dx dy$$

其中 (x,y) 是联合密度函数为  $f(x, y)$ ，边际密度函数为  $f_x(x)$  和  $f_y(y)$  的一对随机变量。

也参阅 Granger 和 Terasvirta(1993)对非线性建模中使用非参数技术的一般讨论。

#### 2.4.3 多变量扩展

(2.3) 式描述的条件概率类型也可用于检测变量之间是否有非线性的因果关系。Baek 和 Brock(1992a)用下列的术语定义非线性 Granger 因果关系：时间序列  $\{y_t\}$  不是  $\{x_t\}$  的原因，如果有

$$\text{Pr ob}\{A_{t,s}(X^m) | A_{t-h,s-h}(X^h), A_{t-k,s-k}(Y_k)\} = \text{Pr ob}\{A_{t,s}(X^m) | A_{t-h,s-h}(X^h)\} \quad (2.4)$$

成立，其中  $A_{t,s}(W^m) = \left\{ \left( W_t^m, W_s^m \right) \left\| W_t^m - W_s^m \right\| < \delta \right\}$ ,  $W = X, Y$ 。这意味着随机变量  $y$  对  $x$  没有预测力。用无条件概率的比率重写表达式 (2.4)，用相关积分统计量估计对应项，Baek 和 Brock(1992a)证明，在从  $y$  到  $x$  没有因果关系的零假设下，最终的统计量（正规化形式）收敛于一个正态随机变量。Baek 和 Brock (1992a) 以及 Hiemstra 和 Jones(1994a)在对  $y$  和  $x$  的依赖特性作不同假定的情况下，提出了渐近方差的其他备选估计量。至于涉及到 BDS 统计量的单变量检验程序，非线性 Granger 检验被用来估计线性模型的残差。在目前的情形下，非线性预测力由数据经过一个向量向回归模型过滤之后留在序列里的任何残余预测力构成。

Hiemstra 和 Jones(1994a)把这个检验策略应用于日股票收益率和交易量的变化百分比。他们的研究工作提供了在两个方向都存在非线性 Granger 因果关系的证据。然而，注意 Gallant, Ross, Llanen (1993)的非线性脉冲响应分析，尽管支持收益率是交易量的 Granger 原因的意见，但是并没有发现从交易量到价格有显著的反馈机制。

以相关积分为基础的方法也已经被用于在多变量设置 (multivariate setups) 下一般非线性的检验。Baek 和 Brock (1992b) 在一个时间序列向量是时频独立 (temporal independent) 和横截面独立的零假设下，将 BDS 检验一般化。

### 3. 股票收益的长期记忆

#### 3.1. 均值的长期记忆

随机游走假说已经在刻画资产价格的长期行为特征的实证研究中占据了主导地位。用来检验这个假说的方法包括多期收益率的自回归——Fama 和 French (1988)——和方差比率检验——Lo 和 Mackinlay(1988)以及 Poterba 和 Summers (1988)。这两种方法是紧密相关的——参阅，例如，Kim, Nelson 和 Startz(1991)——这两种方法的应用反映了传统检验方法在检测市场有效性零假设时对各个令人感兴趣的备择假设的功效的关注。

一个广泛研究的备择假设是股票价格有向均值回复(mean-reverting)的行为，对应的想法是：给定价格的一个变化，从长期的视角来看，将跟随着一个可预测的、相反符号的价格变化。这个假设把股票价格 ( $p_t$ ) 描写成随机游走 ( $p_t^*$ ) 和一个平稳成分 ( $u_t$ ) 之和。Summers

(1986) 认为，暂时成分是一个缓慢衰减的过程，也即 AR (1) 过程  $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ ，其中

$\varepsilon_t$  是一个白噪声过程而  $\rho$  接近但小于 1。

Lo 和 Mackinlay(1988)以及 Poterba 和 Summers(1988)报告了方差比率统计量，为股票价格向均值回复这一假设提供了一些证据。特别地，对于时间短于 1 年的滞后，方差比率看来比 1 大；对于更长时间的滞后，方差比率看来比 1 小。由于滞后  $q$  期的方差比率统计量是前  $q$  个股票收益率的自相关系数的加权和——Cochrane(1988)以及 Lo 和 Mackinlay(1988)，观测到的方差比率的变动模式意味着股票收益率在短期内是正相关的，而在更长的时间区间内是负相关的。注意长期收益率的这种可预测性既和（一些）经济人的行为是非理性的（噪音交易者 (noise trader)）相一致，也和均衡期望收益率会随时间而变的有效市场假说相一致。

Kim, Nelson 和 Startz(1991)以及 Richardson(1993)，包括其他论文，已经提供证据表明，用于检测向均值回复的行为的检验方法可能会产生伪结果 (spurious results)。

在 Jog 和 Schaller(1994)一文中,提出了研究向均值回复的一个新的分解法,利用关于企业个体的数据,强调不同类型企业财务约束变化 (variation of financial constraints) 的结构作用。在不同类型企业 (例如不同规模) 之间财务约束的不同变化,看来有望用来解释象大萧条这样的财务重压时期广为人知的向均值回复的变化,也有望用来考虑融资时的规模经济,更大的企业可以充分利用这种规模经济。同时也希望中央银行的政策对不同类型的企业的冲击会有不同。

Lo (1991) 采取了与其他综合文献稍有不同的方法,提出了一个简单的、可供选择的模型,这个模型产生了方差比率统计量相似的变化模式。Lo(1991)的例子假设股票收益率是一个 ARCH (1) 和一个长期记忆过程之和。

长期记忆平稳过程的特征是他的自相关函数缓慢 (呈双曲线) 衰减,与自相关函数呈现几何衰减的短期记忆过程 (例如 ARMA) 相反。另一种选择是,用原点的谱密度函数的行为刻画一个长期记忆过程的特征。<sup>10</sup> 长期记忆过程可以产生象 Hurst(1951)对尼罗河观察到的那样一种非周期性的循环变化模式。尼罗河长期的干旱期后跟着是长期的洪水泛滥期。Mandelbrot 和 Wallis(1968)把这种现象叫做约瑟夫 (Joseph) 或赫斯特 (Hurst) 效应。

第一篇讨论长期记忆过程在资本市场中的重要性的文章是 Mandelbrot (1971)。Mandelbrot 证明,在长期相互依赖的情况下,完全的套利是不可能的。Mandelbrot 已经在这篇文章中提出了一个重要观点, Hodges(1995)对这个观点进行了详细的阐述,证明除非市场总体而言是无效的,否则分形布朗运动 (Fractal Brownian Motion) 不是描述股票收益率的一个有前途的模型。他算出“对于一个赫斯特指数在 0.4-0.6 范围之外的市场,需要交易量少于 300,才能得到基本上无风险的利润。他提供了一个有用的表格,该表格把赫斯特指数值、夏普比率 (Sharpe Ratios) 和获得在期权策略下的利润所需的交易量联系在一起。

Hodges 已经对赫斯特指数远远偏离 1/2 的“均值长期记忆”的真实性产生了很大的怀疑。其原因在于,假如收益率数据真是由赫斯特指数远远偏离 1/2 的分形布朗运动生成的,那就非常容易在均值/方差条件下产生利润和控制风险。

不管长期记忆表面上看来多么似是而非,由于金融经济学的传统方法严重依赖于套利的可能性,股票收益率的长期检测已经作为一个相关的实证问题浮现出来。Greene 和 Fielitz (1977) 第一个对股票收益率长期记忆假设进行实证研究。他们的分析严重依赖于 Hurst(1951)首先提出来的重标极差 (Rescaled Range, R/S) 统计量。对一个时间序列  $X_t$  和任选的宽度为  $s$ 、开始时点为  $t$  的时间区间,样本的时序极差 (sequential range)  $R(t,s)$  的定义是:

$$R(t,s) = \max_{0 \leq k \leq s} \left\{ X_{t+k}^* - \left( X_t^* + \frac{k}{s} [X_{t+s}^* - X_t^*] \right) \right\} \\ - \min_{0 \leq k \leq s} \left\{ X_{t+k}^* - \left( X_t^* + \frac{k}{s} [X_{t+s}^* - X_t^*] \right) \right\}$$

<sup>10</sup> 对于  $0 < H < 1$ , 一个长期记忆过程的自相关函数  $\rho(k)$  满足  $\rho(k) \sim Ck^{2H-2}$ ,  $C > 0$ 。对于  $H > 1/2$ ,  $\sum \rho(k) = \infty$ , 而对于  $H < 1/2$ ,  $\sum |\rho(k)| < \infty$  且  $\sum \rho(k) = 0$ 。相应地,对于  $H > 1/2$ , 谱密度函数  $f(\omega) = \sum e^{-i\omega k} \rho(k) / 2\pi$  在原点发散且当  $|\omega| \rightarrow 0$  时趋向于零。一些作者对第一类过程保留了长期记忆的术语,并把第二类过程称为“中等”记忆或抗持续 (anti-persistent)。参阅 Beran (1994) 以及 Brockwell 和 Davis (1991)。对长期记忆过程和它在经济学中的应用的文献综述,参阅 Baillie (1995)

其中  $X_t^*$  是  $X_t$  在从 0 到  $t$  区间的累加和，也就是说， $X_t^* = \sum_{u=1}^t X_u$ ，为方便起见令  $X_0^* = 0$ 。通常用滞后  $S$  期的标准差将样本极差正规化：

$$S(t, s) = \left( \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s X_{t+k}^2 - \frac{1}{s^2} \left[ \sum_{k=1}^s X_{t+k} \right]^2 \right)^{1/2}$$

其最终比率就是我们知道的重标极差  $R/S$ 。在一系列的论文中，Mandelbrot 和他的一些合作者已经发现，从具有短期依赖的平稳过程的意义上说， $R/S$  统计量以速率  $S^{1/2}$  收敛于一个非退化的随机变量，而对于一个展示长期依赖的过程， $R/S$  统计量以速率  $S^H$  收敛于一个非退化的随机变量，这里的  $H$  即赫斯特系数，不同于  $1/2$ ——参阅 Mandelbrot(1975)；在这个意义上说，可以用重标极差统计量来区分短期记忆和长期记忆过程。不仅如此，Mandelbrot (1975) 的定理 6 证明，对于方差无限大的稳态分布的吸引域中的独立同分布序列，收敛的速率也是  $S^{1/2}$ 。

用实用的术语来说，画出  $R/S$  统计量的对数和  $S$  的对数图， $S$  取不同的值，应该可以揭示数据是否由短期或长期依赖过程生成的：对短期依赖过程，不同的点应该散布在斜率等于  $1/2$  的直线周围；对长期依赖过程，不同的点应该散布在斜率  $H \neq 1/2$  的直线周围。Wallis 和 Matalas (1970) 分别对选定滞后项数和选定开始点这两个备择过程进行蒙特卡罗模拟，称为 F 赫斯特和 G 赫斯特。在两种情形下，长期依赖指数  $H$  的估计都是  $\log(R/S)$  对常数项和  $\log(s)$  进行最小二乘回归的斜率。Greene 和 Fielitz(1977)对在纽约证券交易所上市的 200 支普通股股票的日收益率进行了这样的分析，得出结论说长期依赖刻画了样本中显著的百分比特征。更近期以来，Peters (1994) 也用  $R/S$  分析，为一些常见的金融资产的收益率有赫斯特效应提供了证据。

股票收益率有长期记忆的这些发现已经引起了争议，因为有短期依赖时，经典的  $R/S$  分析是有偏的。Wallis 和 Matalas(1970)讨论了这一事实，Davies 和 Harte(1987)进一步研究了这一问题。Aydogan 和 Booth (1988) 认为，Greene 和 Fielitz(1977)的结果可能确实是经典的  $R/S$  分析对序列依赖和非平稳不稳健的结果。为了纠正由于序列相关产生的偏差，Peters (1994) 把经典的  $R/S$  分析应用于一阶自回归过程的估计残差。进一步地，他将不同滞后长度得到的  $R/S$  统计量的值与  $R/S$  统计量的期望值相比较，期望值是用 Anis 和 Lloyd(1976) 计算白噪声过程的方法计算的。Peters(1994)使用的值反映了由模拟确定的修正项。然而，注意到 Deters (1994) 的方法仍就不允许正式的假设检验，以及他在工作中假定一个 ARCH 滤子消除要检验的所有序列的短期序列相关是高度可疑的。

Lo (1991) 提出了  $R/S$  方法的一个精炼形式，允许正式的统计检验而且对序列相关和某些形式的不平稳是稳健的。在短期记忆的零假设下<sup>11</sup>，Lo 证明统计量  $Q(n) \equiv R(1, n) / \tilde{S}(1, n)$  弱收敛于单位区间上一个布朗桥的极差 (range of a Brown bridge) ——一个均值为  $\sqrt{\pi/2}$ 、方差为  $\pi^2/6 - \pi/2$ 、分布函数正偏的随机变量。Lo 的程序的主要创新之处在于使用 Newey-West 异方差和自相关一致估计量：

<sup>11</sup> Lo 把短期记忆过程定义为一个混合系数充分地衰减为零的强混合过程。

$$\tilde{S}(1, n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^q \omega_j(q) \left\{ \sum_{k=j+1}^n (X_k - \bar{X})(X_{k-j} - \bar{X}) \right\}$$

来代替  $S(1, n)^2$ ，其中， $\omega_j(q)$  是 Bartlett 权重。进一步地，Lo 的检验不必象经典的 R/S 分析那样依赖于子样本分析。Lo (1991) 把  $Q(n)$  统计量应用于日和月股票收益率指数 (CRSP 文件中的等权指数和价值加权指数)，得出的结论是 Greene 和 Fielitz (1977) 的方法对股票收益率存在长期记忆估计过高。

$Q(n)$  统计量——也称为修正的 R/S 统计量——已经被几个研究者应用于其他金融数据集，即 Cheung 和 Lai (1993) 应用于黄金市场收益率，Cheung, Lai 和 Lai (1993) 以及 Crato (1994) 应用于国际股票市场，Goetzmann (1993) 应用于历史上的股票收益率序列，Hiemstra 和 Jones (1994a) 应用于股票收益率的面板 (panel)，以及 Mills (1993) 应用于英国股票的月收益率——也参阅 Ballie (1995)。这些文章显示的证据大致和 Lo (1991) 的结果相一致，用变换后的 R/S 统计量发现不太有证据支持那些金融资产的收益率有长期记忆。然而，Pagan (1995) 强调，包含在 Newey-west 估计量  $\tilde{S}(1, n)^2$  中的自相关的数目  $q$  的选择对结果至关重要，小的  $q$  通常会发现对备择假设有利的证据（就象在传统的 Greene 和 Fielitz 的应用中， $q$  被设定为 0 一样），一个大的  $q$  偏向于支持零假设。Andrews (1991) 在他的应用中提供了一个  $q$  的自动选择规则，Lo (1991) 也使用这个规则，然而，这个规则仅仅对 AR (1) 过程才有最优特性。

$Q(n)$  统计量的另外一个问题看来是它对矩条件失效的敏感。Hiemstra 和 Jones (1994b) 在他们的股票收益率样本中，发现最大矩估计值和被 R/S 检验左侧拒绝的概率之间有正相关关系。这个关系对右侧拒绝的概率似乎是相反的。正象以前提到的，注意到 Mandelbrot (1975) 以及 Mandelbrot 和 Taqqu (1979) 发现经典的 R/S 分析为赫斯特系数提供了一个几乎必定 (a.s.) 的一致估计量，即使由无限方差的过程生成的独立同分布数据也是如此。然而，这两篇文章没有提供 R/S 统计量的极限分布的特征。此外，Lo (1991) 在假设数据分布的前  $4 + \delta$  ( $\delta > 0$ ) 阶矩有限的情况下，证明 R/S 统计量收敛于布朗桥的极差。

一个简单的模拟研究报告于表 1，看来已证实，象 Hiemstra 和 Jones (1994b) 观察到的那样，尽管肥尾数据似乎没有影响赫斯特系数的 R/S 估计量的特性，与渐近分布相比，检验的抽样分布相对向左移动。表 1 报告了从帕累托分布族生成的 1000 个序列、每个序列有 5000 个观测值的 R/S 统计量的计算结果，见  $\alpha = 1.5$  和  $\alpha = 4$  的第 2 节的值 ( $P_\alpha$ )。象 Mandelbrot 确定的一样，赫斯特系数的平均估计值接近 0.50。然而，左侧拒绝率高于由渐近分布给出的名义拒绝率，而右侧的拒绝率低于由渐近分布给出的名义拒绝率。<sup>12</sup>  $\alpha = 1.5$  的帕累托分布生成数据的经验分布的移动比由  $\alpha = 4$  的帕累托分布生成的数据的经验分布的移动要更明显。在给定 Lo (1991) 对矩所做的假定下，这个事实的出现并不奇怪。

表 1：在矩条件失效的情况下，重标极差 (R/S) 检验的估计拒绝率

<sup>12</sup> 左侧拒绝率对应于零假设  $H = 1/2$  对备择假设  $H < 1/2$  (反持续长期记忆) 的拒绝率，而右侧拒绝率对应于零假设  $H = 1/2$  对备择假设  $H > 1/2$  (持续长期记忆) 的拒绝率。

名义拒绝率		$\alpha = 1.5$					$\alpha = 4$				
		0	20	40	60	A	0	20	40	60	A
左	0.01	0.023	0.020	0.017	0.014	0.023	0.018	0.013	0.010	0.007	0.018
	0.05	0.098	0.092	0.081	0.075	0.093	0.071	0.062	0.051	0.044	0.072
	0.10	0.174	0.172	0.166	0.156	0.177	0.136	0.124	0.110	0.099	0.130
右	0.10	0.030	0.024	0.022	0.016	0.030	0.092	0.086	0.078	0.080	0.093
	0.05	0.009	0.000	0.005	0.006	0.009	0.038	0.039	0.035	0.031	0.036
	0.01	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.009	0.007	0.008	0.007	0.008
均值		0.510	0.510	0.510	0.511	0.510	0.521	0.521	0.521	0.522	0.521
标准误		0.028	0.027	0.027	0.026	0.028	0.031	0.030	0.030	0.029	0.031

数据是分别从  $\alpha = 1.5$  和  $\alpha = 4$  的帕累托分布中生成的。1000 个序列每个序列有  $N=5000$  个观察值。标有均值和标准误(Standard error)的行报告的是赫斯特系数的平均估计和赫斯特系数在模拟时的标准误。每列报告的是包含在估计量  $\tilde{S}(1, n)$  中的自相关系数的项数  $q$  为不同数目时, R/S 检验的经验拒绝率。标有 A 的列对应于 Andrews(1991)的最优规则。

从文献中还可获得长期记忆假设的其他检验。这些方法包括 Geweke 和 Porter-Hudak (1983)——此后简称为 GPH 检验——Davies 和 Harte(1987)的局部最优和贝塔最优检验, Robinson (1991) 以及 Agiakloglou, Newbold 和 Woahr(1994)发展的拉格朗日乘数检验, 与 Beran(1992)的拟合优度统计量紧密相关的 Wu (1992) 的局部最优不变量检验 (locally best invariant test)<sup>13</sup>。与修正的 R/S 统计量相反, 所有这些检验都对备择假设假定一个参数形式, 而 GPH 检验只需要对备择过程的长期动态进行参数设定。由于这个原因, GPH 检验有时被归为半参数检验。

自回归函数呈双曲线衰减的主导参数离散时间模型, 是 Granger 和 Joyeux(1980)以及 Hosking (1981)独立引入的分数单整自回归移动平均模型 (fractional integrated autoregressive moving average model, ARFIMA) ——ARFIMA 的连续时间形式, 可参阅 Viano, Deniau 和 Oppenheim(1994)。对  $-0.5 < d < 0.5$ , 如果  $X_t$  是下面方程的唯一稳定解, 那么我们说  $X_t$  遵循一个 ARFIMA( $p, d, q$ ) 模型。

$$(1 - B)^d \phi(B)X_t = \theta(B)\eta_t, \quad \eta_t \sim iidN(0, \sigma_\eta^2)$$

其中,  $B$  是滞后算子 ( $B^j X_t = X_{t-j}, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p, \quad \theta(z) = 1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2 - \dots - \theta_q z^q$$

进一步地, 分数差分算子是通过下列展开式定义的:

$$(1 - B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)} B^j \tag{3.1}$$

<sup>13</sup> Cheung(1993a)对长期记忆假设的一些更流行检验中的小样本特性用蒙特卡罗法进行了研究。

对  $ARFIMA(p, d, q)$  模型的详细讨论，参阅 Brockwell 和 Davis(1991)。对于  $C > 0$ ，当  $|\lambda| \rightarrow 0$  时， $ARFIMA(p, d, q)$  模型的谱密度函数与  $C|\lambda|^{-2d}$  成正比。Geweke 和 Porter-Hudak(1983)对长期记忆的检验是基于这个事实：将低频时的周期图 (periodgram) 的对数对这些频率下的某些函数回归，用这个最小二乘回归的斜率来估计  $d$ <sup>14</sup>。GPH 认为由此求得的  $d$  的估计量可以捕获不受该过程的短期记忆行为污染的长期记忆行为。Robinson(1993)指出，假如除了更高周期图频率的截断 (truncation) 之外，就对第一个纵坐标进行另一个截断，GPH 的看法是渐近成立的。通常检验假设  $d=0$  相对于  $d \neq 0$  的  $t$  检验，是短期记忆零假设相对于长期记忆备择假设的检验。需要指出的是，GPH 和 Lo 的重标极差检验的小样本标准对大的自回归效应和大的移动平均效应都非常敏感——参阅 Cheung (1993a)。

Cheung(1993b)使用 GPH 方法，在一组名义汇率中发现一些长期记忆的证据。而 Cheung 和 Lai (1993) 发现，一些国外价格和国内价格线性组合是长期依赖的，那就是说，国外和国内的价格是分数协整的 (fractionally cointegrated)。在其股票收益率的横截面中，Hiemjtra 和 Jones(1994b)发现，用 R/S 统计量时短期记忆零假设的拒绝率和用 GPH 检验时短期记忆零假设的拒绝率是密切相关的。

### 3.2. 波动的长期记忆

在长期记忆模型中，更活跃的研究领域之一是它们在波动率过程中的应用。这是遵循 Engle (1982) 关于自回归条件异方差 (ARCH) 模型的开创性论文，对条件方差模型的分析。ARCH 模型的定义是  $y_t = \sigma_t Z_t$ ，其中，通常规定  $Z_t$  是一个  $E[Z_t] = 0$ 、 $Var[Z_t] = 1$  的独立同分布过程。变量  $\sigma_t^2$  是正的、 $\mathcal{F}_{t-1}$ -可测函数，这是  $\mathcal{F}_{t-1}$  是由  $(Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots)$  生成的  $\sigma$ -一代数，因此， $\sigma_t^2$  是过程  $y_t$  的条件方差。

通常，股票收益率序列的样本自相关函数和白噪声过程的自相关函数相类似。然而，象收益率的平方、收益率的绝对值或收益率平方的对数这样的波动率指标，其样本自回归函数是正的、缓慢衰减的。这个事实解释了为什么许多涉及到高频数据的 ARCH 类模型的应用中，显示波动率的单变量表达式有近似的单位根。这个特征出现在 Engle (1982) 最初的文章中，并且推动了在 Engle 最初研究工作基础上的一些拓展，即 Bollerslev(1986)的广义 ARCH (GARCH)、Engle 和 Bollerslev (1986) 的单整 GARCH (integrated GARCH, IGARCH)。进一步地，Nelson (1991) 在指数 GARCH (exponential GARCH, EGARCH) 模型的应用中，经常发现自回归多项式的根接近于单位圆，那就是说，高频股票市场数据呈现出高度持续波动的特性。

残差平方的自相关函数非常缓慢的衰减促使 Crato 和 de Lima (1994) 把修正 R/S 和 GPH 检验应用于各种经过过滤的美国股票收益率指数的残差平方。对高频率序列，波动率是短期记忆过程这个假设被明显地拒绝。将长期记忆过程应用于残差平方的理由，来源于这个事实：象 Bollerslev (1986) 文中叙述的那样，GARCH(p,q)过程的条件方差  $\sigma_t^2$  可以写成无穷维的 ARCH ( $\infty$ )。因此，这个检验过程和 GARCH 效应的拉格朗日乘数检验是平行的，它也进行平方序列的检验。Ding, Granger 和 Engle (1993) 也研究了收益率序列分数矩自相关的

<sup>14</sup> 对于这个回归方程的另一种估计程序，参阅 Beran (1993) 和 Robinson (1993)。

衰减，对 S&P500 指数 (S&P500) 的收益率 ( $y_t$ )，他们用不同的正值  $\nu$  构建了序列  $|y_t|^\nu$ ，发现自相关的衰减非常慢。这导致他们引入一种新型的 ARCH 模型——非对称幂 ARCH 模型 (asymmetric power-ARCH)，在该模型中， $\nu$  变成了一个需要估计的参数。然而，这个模型参数化仍然是有限的，这使它成为一个短期记忆模型。

已经有人提出两类模型，以反映波动率序列的自相关函数的缓慢衰减。第一类的这种模型包括分数单整 GARCH 模型 (FIGARCH)、Baillie, Bollerslev 和 Mikkelson(1993)以及 Bollerslev 和 Mikkelson(1994)的分数单整的 EGARCH 模型。它是允许滞后新生的平方有双曲线衰减率的 ARCH 类模型的一个自然扩展。第二类长期记忆波动率模型是 Harvey(1993)以及 Breidt, Crato 和 de Lima(1994)的随机波动率。

FIGARCH( $p, d, q$ ) 模型的定义为

$$(1 - B)^d \phi(B)(\sigma_t^2 - \mu) = \theta(B)(y_t^2 - \mu)$$

其中  $\phi(z)$  和  $\theta(z)$  分别是  $p$  阶和  $q$  阶多项式， $(1 - B)^d$  的定义同 (3.1) 式。与 IGARCH 过程类似，FIGARCH 过程是严平稳而非协方差平稳，因为方差不是有限的。其结果是， $y_t^2$  的自协方差函数没有定义，不能直接用谱方法和自协方差方法。此外，Baillie, Bollerslev 和 Mikkelson (1993) 讨论的 (准) 最大似然估计的渐近特性依赖于 Bollerslev 和 Wooldridge (1992) 提出来的一组条件的验证。在这一点上，对 FIGARCH 过程，这些条件是否满足，还不得而知。

FIEGARCH( $p, d, q$ ) 模型，是用

$$\log \sigma_t^2 = \mu_t + \theta(B)\phi(B)^{-1}(1 - B)^{-d} g(Z_{t-1})$$

定义一个严平稳且遍历过程。此外，假如  $d < 0.5$ ， $(\log \sigma_t^2 - \mu_t)$  是一个协方差平稳过程。应注意的是，函数

$$g(Z_t) = \delta_1 Z_t + \delta_2 (|Z_t| - E|Z_t|)$$

是由 Nelson (1991) 引入来反映这个事实的：股票价格的变化趋向于与股票波动率的变化负相关，即所谓的杠杆效应。FIEGARCH 模型参数的最大似然估计的渐近特性也依赖于 Bollerslev 和 Wooldridge (1992) 提出的同样的一组条件的验证。

Baillie, Bollerslev 和 Mikkelson (1993) 的模拟实验表明，如果用一个 GARCH 过程拟合由 FIGARCH 模型生成的数据，对自回归多项式，和通常的金融数据一样，得到的估计值隐含着各个根非常接近于单位圆。不仅如此，在他们将 FIGARCH 模型应用到美国美元和德国马克的汇率时，IGARCH 行为相对分数单整行为 (FIEGARCH) 的假设被明显地地拒绝。Bollerslev 和 Mikkelson(1993)把 FIEGARCH 模型应用于 S&P500 股票指数的日股票收益率时，得到类似的结果。

第二类波动率模型允许长记忆的是 Harvey(1993)以及 Breidt, Crato 和 de Lima (1994) 的随机波动率类模型。随机波动率模型是不可观测成分模型，该模型是两个随机过程的乘积，比如说  $y_t = \sigma_t Z_t$ ，其中， $Z_t$  可以象在 ARCH 情形下一样定义，但是  $\sigma_t^2$  不再是一个  $\mathcal{F}_{t-1}$ -

可测过程。Taylor (1986) 假设波动率的对数  $\ln(\sigma_t)$  服从平稳的高斯 AR (1) 过程。注意到随机波动率过程可以看作是在理论金融上使用的连续时间模型的欧拉近似, 在连续时间模型中, 资产价格  $P(t)$  和波动率  $\sigma(t)$  都遵循一个扩散过程。Taylor(1994)对最近关于波动率过程的其他设定假设的文献进行综述。Breidt, Crato 和 de Lima(1994)提出了一个随机波动率模型, 通过 ARFIMA 过程的波动率过程函数, 捕捉收益率平方的 (对数的) 自相关函数的缓慢衰减, 具体说来, 假定  $\sigma_t = \sigma \exp(v_t / 2)$ , 这里  $v_t$  是一个独立于  $Z_t$  的长期记忆过程。简单地, 可证明  $y_t$  和  $y_t^2$  都是协方差平稳和严平稳。经过某些变换, 模型可以写成  $x_t = \mu + v_t + \varepsilon_t$ , 其中  $x_t = \log y_t^2$ ,  $\mu = \log \sigma^2 + E[\log Z_t^2]$ 。在  $Z_t$  是高斯分布的假定下,  $\varepsilon_t$  是均值为零, 方差为  $\pi^2 / 2$  的独立同分布。  $x_t$  从  $v_t$  中继承了长期记忆特性。

在他们把长期记忆随机波动率模型应用到股票收益率时,  $v_t$  是一个差分参数  $d$  的估计值为 0.444 的 ARFIMA (1,d,0) 模型。标准 t 统计检验明显地拒绝数据是由一个短期记忆过程生成的假设。模型通过 Whittle 频域近似 (frequency-domain approximation) 的高斯似然最大化来估计。他们证明, 这个程序给出了模型参数的一致估计量。

象有关波动率过程的许多其他参数化一样, 股票收益率过程的方差有长期记忆这一发现的稳健性, 仍然有待讨论。首先, 没有很多经济的理由来支持这些统计发现。Bollerslev 和 Mikkelsen (1994) 认为, 股票市场指数波动率的长期记忆是加总的结果, 因为单个收益率的波动看来不太有持续性。Granger (1980) 指出当加总的项数增加时, 系数从一个合适分布随机抽取的 AR (1) 过程的加总逼近于一个长期记忆过程。在短期记忆随机波动率模型的背景下, 也可以推导出相同的结果, 加总可以产生市场指数中被观测到的长期记忆现象。然而, 将长期记忆检验应用于一个从 CRSP 磁盘中抽取出来的有 2165 个收益率的样本, 这一简单应用的结果似乎与这里的假设相矛盾。结果列于表 2, 在水平上, 系列的结果与 Hiemstra 和 Jones(1994b)从一个相似的样本中得到的结果是一致的: 不太有证据支持均值有长期记忆。然而, 两种长期记忆检验的结果都表明大比例的序列表现出波动率有长期记忆的某些证据。对待这些结果要极其慎重, 如同 Crato 和 de Lima (1994) 指出的那样, 象 GARCH 这样的短期记忆波动率过程用表 3 中检验长期记忆的任何一种方法进行检验, 都会拒绝短期记忆零假设。

表 2: 用 Geweke 和 Porter-Hudak (GPH) 检验和重标极差 (R/S) 检验, 股票收益率样本有短期记忆的拒绝率

	GPH		R/S	
	X	X <sup>2</sup>	X	X <sup>2</sup>
10%检验	16.4%	72.1%	12.0%	51.8%
5%检验	10.5%	65.3%	4.0%	41.6%
均值	0.511	0.794	0.524	0.563
标准误	0.165	0.188	0.031	0.034

标有均值和标准误的行报告的是用 GPH 和 R/S 法, 赫斯特系数的平均估计值和不同收益率序列的赫斯特系

数的标准误。对频率处于  $N^{0.1}$  到  $N^{0.5}$  之间的数据，计算 GPH 检验。在 R/S 检验中考虑的自相关的项数遵循 Andrew (1991)。

条件异方差模型有可能被错误设定。比较各种可替代设定的一个方法是集中于关注模型追踪某些样本特性的能力。Breidt, Creto 和 de Lima(1994)表明，从他们的长期记忆波动率模型中估计得到的平方过程的对数自相关函数，可以相当好地拟合样本的自相关函数。尤其是他们的模型可以复制样本自相关函数的缓慢衰减，这个特征是 Nelson(1991)的 EGARCH 这样的短期记忆模型无法比拟的。传统的 GARCH (1, 1) 和 IGARCH (1, 1) 模型在生成这种类型的自相关函数时也有问题。然而，众所周知，数据是非平稳时，可能会产生有极端持续性特征的伪证据。象第 2 节中提到的那样，非平稳已经被提出来作为方差有持续性的这些发现的解释。Cheung (1993a) 的模拟结果表明，R/S 和 GPH 检验对序列水平的移位(shift)的稳健性存在问题，这个问题对于长期记忆检验来说，意味着这两个检验对方差的移位的稳健性可能也有问题。

在这方面，一个特别引人注目的模型是 Hamilton 和 Susmel (1994) 的转换 ARCH 模型 (Swatching ARCH, SWARCH)。在这个模型中，波动率状态 ( $S_t$ ) 数是有限的，状态变量由一个转移概率为

$$\begin{aligned} \text{Prob}(s_t = j | s_{t-1} = i, s_{t-2} = k, \dots, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) \\ = \text{Prob}(s_t = j | s_{t-1} = i) = p_{ij} \end{aligned}$$

的马尔可夫链决定。因而这个收益率过程可定义为  $y_t = g(s_t)^{1/2} u_t$ ，其中  $g(s_t)^{1/2}$  在每个不同状态 (regime) 下是常数，而  $s_t$  和  $u_t$  是一个 ARCH 类模型。Hamilton 和 Susmel (1994) 考虑了  $u_t$  的其他几个 ARCH 设定，包括 Glosten, Jagannathan 和 Runkle (1994) 的参数化，把杠杆效应结合到 ARCH 的框架中，在这个特别的参数化中——用  $SWARCH - L(p, q)$  代表，其中 L 代表杠杆效应—— $\sigma_t^2$  由下式给定：

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \delta d_{t-1} u_{t-1}^2$$

其中， $d_{t-1}$  是一个区分  $u_{t-1}^2$  为正值还是负值的虚拟变量。在 Hamilton 和 Susmel (1994) 考虑的特定类型的 SWARCH 模型中，过程的尺度(scale)是随状态而变的，但是  $u_t$  的参数独立于波动状态。Hamilton 和 susmel (1994) 用 SWARCH 模型拟合股票周收益率。

这类模型有比更普通的 GARCH 模型稍微好些的向前一期预测 (取决于考虑的损失函数)。例如，有四个波动率状态的 SWARCH 模型是一个条件异方差模型，具有比方差为常数的模型更小的均方误差。需要指出的是，后一个模型是双参数模型，而 SWARCH 模型涉及到 15 个不同参数的估计。某些 SWARCH 类的模型也可能产生多峰无条件分布，这可能是违反事实的。

为了讨论从 SWARCH 模型生成的数据是否看起来象可通过 R/S 检验和 GPH 检验的长期记忆波动率模型。我们做了一个小型的蒙特卡罗实验。我们取由 Hamilton 和 Susme(1994)

估计的学生  $t$  的 SWARCH-L(3,2)，生成两组 1000 个序列。第一组每个序列有 1024 个观测值，而第二组每个序列有 2048 个观测值。我们对水平序列计算两个检验，进而又对平方序列计算两个检验。不出所料，当把两个检验应用到水平序列时，均没有发现长期记忆的证据。然而，表 3 显示，当应用于平方序列时，两个检验均检测出了长期记忆的伪证据。此外，如果将 SWARCH-L 模型生成的数据用于更高频率一例如日收益率数据——的估计，拒绝百分比可能会增大。Crato 和 de Lima (1994) 对由高斯 GARCH 和 IGARCH 模型生成的数据，给出了相似的结果。他们发现，这两个模型生成的数据与实际观测到的数据相比，倾向于产生更大的长期记忆检验统计量的值。

然而，由 R/S 分析产生的赫斯特系数估计，可能对识别波动率过程是短期记忆过程的假设相对于波动率有长期记忆特征的备择假设之间的伪拒绝，提供一些有用的信息。Breidt、Crato 和 de Lima (1994) 提供了一些蒙特卡罗模拟的证据：当 R/S 统计量本身倾向于过度拒绝短期记忆零假设时，包括在估计量  $\tilde{S}(1, n)$  中的自相关的个数是 Andrews(1991) 的最优规则给定的个数，R/S 统计量提供的赫斯特系数的估计值就接近于它的理论值 0.5。注意表 3 中报告的用 R/S 方法估计的水平序列的赫斯特系数的均值是 0.525，而平方序列则为 0.565，与模拟的结果变化不大。Breidt、Crato 和 de Lima (1994) 用同样的估计量，对价值加权和等权的 CRSP 日收益率的平方序列进行估计，报告出来的赫斯特系数的估计值在 0.65 以上，这一点看来值得进一步探讨。下面转而简要讨论最近使非对称信息模型更贴切地解释从高频到中频资产市场数据实证特征的尝试。

表 3：对 SWARCH 模型，用 Geweke 和 Porter-Hudak (GPH) 检验和重标极差 (R/S) 检验，估计拒绝率

	GPH		R/S	
拒绝率	X	X <sup>2</sup>	X	X <sup>2</sup>
10%	0.162	0.327	0.067	0.466
5%	0.099	0.236	0.029	0.353
均值	0.501	0.658	0.525	0.565
标准误	0.173	0.168	0.035	0.042

数据是从 Hamilton 和 Susmel (1994) 中报告的 Student  $t$ -SWARCH-L(3,2) 模型生成的。1000 个序列，每个序列有  $N=1024$  个观察值。标有均值和标准误的行报告的是用 GPH 和 R/S 法，赫斯特系数的平均估计值和不同收益率序列的赫斯特系数的标准误。对频率处于  $N^{0.1}$  到  $N^{0.5}$  之间的数据，计算 GPH 检验。在 R/S 检验中考虑的自相关的项数遵循 Andrews (1991)。

#### 4. 非对称信息结构模型和股票收益率的类型化特征 (stylized features)

Sargent(1993), Wang (1993, 1994), Brock 和 LeBaron(1995), de Foutnouvelle (1995) 近来的研究工作，(也参见 Admati, Campbell, Grossman, Hellwing, Lang, Litzenberger, Madrigal, Pfleiderer, Singleton, Stiglitz 以及其他人的研究工作)，已经把不对称信息模型理论推到更接近于能够解释市场高频数据特征的实证模型，这些市场数据的频率具有比综述的 Singleton (1990) 和 Altug 和 Labadie(1994) 对宏观金融研究中着重考察的经济周期更高的频率。无需进入正式的细节，我们试着描述这类工作的某些研究，以及我们希望模型再现的市场活动的类型化特征。

以下是类型化特征：(i) 在所有滞后期和先行期，单个资产收益率的自相关函数都接近于 0。这是有效市场假说一种版本类型化表述。(ii) 测量波动率的指标，例如收益率的平方或收益率的绝对值的自相关函数，是正的，有一个缓慢衰减的尾(对于指数，衰减得更慢)。特征二是 ARCH 类现象的一种类型化形式，已经产生了大量“统计”文献(参见 Bollerslev, Engle 和 Nelson (1994))。本文第 3 节讨论了波动率的自相关函数缓慢衰减的证据。(iii) 交易量的自相关函数和波动率的自相关函数有相似的形状。我们将特征(ii)和特征(iii)称为波动率和交易量“有持续性”。(iv) 交易量和波动率的互相关函数对于当期波动率是正的，对于滞后期或先行期，则迅速跌落到零。先行期与滞后期衰减的速率可能会有某种程度的不对称(参阅 Antoniewicz(1992))。(v) 当最近过去(near-past)的波动率下降时，最近将来(near-future)的短期可预测性会增大(LeBaron(1994))。(vi) 收益率、波动率和交易量突变，很难归因于“消息”。现在转到对不对称信息模型进行一个非正式的描述。

在每一个时点，风险厌恶的交易者接收到有关今天正在交易的资产的实际未来值的成分的信号。信号是随机变量，等于未来值的成分加噪声。精确度是成分的方差与信号噪声的方差之比。即使信号的精确度是一样的，信号的不同实现(different realizations of signals)会产生交易量的基础水平。不同交易者接收到的信号的精确度不相同也会产生交易量。

假如模型的结构已知，交易者根据价格和信号作理性条件预期，那么 Milgrom, Stokey 和 Tirole(参阅 Sargent (1993)的很好的讲述)著名的无交易定理的断言：除非加入某种随机性使得交易者不得不参与到“信号过程”中来，否则交易量将会干涸。

Wang(1993,1994)的论文，对一类动态异质经济人不对称信息模型给出准确的闭式解，该模型可再现市场数据的某些类型化特征。然而，除 Brock 和 LeBaron(1995)以及 de Fontnouvelle(1995)之外，没有研究工作既内生化信息结构又对推导出的模型进行校核，看看这些模型可以多准确地复制上述(i)-(vi)的特征。

Brock 和 LeBaron(1995)用短期存在的资产和短期存在的交易者构建了一个非对称信息模型，在该模型中，交易者决定是花费资源来购买精确的信号使得他们对资产的期末价值的条件期望更敏锐，或是什么资源也不花，得到公共都可得到的、粗略的条件期望。把资产的期末实际值称为“基本值”(fundamental)，基本值是一个市场正在定价的随机变量。信息购买决策以离散选择随机效用模型为基础，该模型中效用的确定性部分是基于交易利润的分布滞后测度。交易利润是沿着均衡路径计算的。

沿着相同的路线，但是用无限期存在的资产，de Fontnouvelle (1995)发展了一个复杂得多的模型。de Fontnouvelle 展示了决定信号购买选择的利润测度的持续性如何产生波动率和交易量的持续性。看来，如果他的利润测度衰减得足够慢，他的模型可能可以产生使波动和交易量缓慢衰减的自相关函数。这有助于理解第 3 节论述的波动率自相关的缓慢衰减现象。

de Fontnouvelle 围绕一个已知解，拓展出一个展开式“解”他的模型。上面讨论的两种模型在再现特征(i)-(iv)方面都取得了有限的成功。因此，由于具有无限期的资产，de Fontnouvelle (1995)的模型可能是与 Duffie 和 Singleton (1993)的研究路线相似的、估计高频收益率数据和高频交易量数据的一个可选择的模型。

假如从“极”理性“往后退”，不允许交易都根据均衡价格函数形成条件期望，那么在交易者的异质性是可持续的条件下，这种模型产生的交易量是持续的。在 Brock 和 LeBaron(1995)的模型中，如果是否购买信号的决策是在比观测到数据的时间尺度更慢的时间尺度作出的，那么交易者的异质性就会持续。无限期资产，加上利润测度分布滞后的缓慢衰减，使 de Fontnouvelle 可以不用为信息购买决策引入一个更慢的时间尺度，就可以产生持续性。

价格变化(或收益率)的波动取决于市场的平均精确度，市场平均精确度定义为，以每

一类型交易者占该类型交易者的比例为权数，每一类交易者精确度的加权平均值。当市场精确度高时，价格变化的波动就更高，因为市场紧紧“跟踪”我们试图去定价的随机期末价值。当精确度最低时，价格的变化与公众可得到的条件期望的变化成正比。如果公众可得到的信息非常“粗糙”，那么这个价格的变化就会小。

这个观察包含了一个教训，那就是，可能对于学术界的人士来说是显而易见的，但对于新闻界的评论员们可能就未必：观察到的市场波动不一定都自动与有问题的“过度”波动相关联。

可以证明，如果信息精确度购买决策是在比数据的时间尺度更慢的时间尺度上作出的，波动率的持续性可能会增大。也许可以将精确度购买决策看作是交易者“类型”——即他们是“短期”交易者、“中期”交易者或“长期”交易者——的一个代表。其原因是，至少信号精确度的部分成本是交易者保持其交易专门技术和交易信息基础的机会成本。因此，对高频数据来说，交易者的类型变化不象收集到的数据变化那么快，可能是相当现实的。

追问波动率的持续性是否是市场正在试图去定价（即“估计”）所固有的基本值（fundamental），或者是否是市场定价过程本身加进波动率持续性，是一个有趣的问题。如果交易者是风险厌恶的，基本值的波动率持续性会使他们在交易时胆小以至于交易量和波动率的同期相关关系充分阻抑，与类型化特征（iv）相冲突。Brock 和 LeBaron(1995)以及 de Fontnouvelle（1995）讨论说这会与类型化特征有潜在的冲突，除非波动率持续性是由市场定价过程本身添加进去的。即使上述讨论表明了市场定价过程本身正在加进的波动率持续性，可能高于基本值波动率持续性。在这个问题上，仍不能下最终结论。

现在考虑加入外部股份的影响。交易者团体作为一个整体在均衡条件下必须持有这些外部股份。这创造了团体作为一个整体无法规避的风险。交易者团体必须因为承担了这样的风险而得到补偿。这个效应创造了使均衡股票价格折价的风险溢价。

为了防止以共同知识和价格形成条件期望使均衡时交易量干涸，在许多不对称信息文献中，在“外部”股份的净供给中引入随机性（参阅 Sargent(1993)）。

假如外部股份的净供给的变化是正相关的，那么 LeBaron 效应（v）可以在 Brock 和 LeBaron 模型的背景下得到解释。这是由于，当最近的过去的市场精确度增大时，最近的将来的波动率也增大。当市场精确度无限大时，外部股份供给的自相关对价格变化自相关的影响为 0。之所以如此，其原因在于，由这些外部股份产生的、对均衡价格的压抑效应是由于交易者团体持有这些外部股份必须承担的风险产生的。但是当市场精确度无限大时，这个风险为零。

最近的将来的价格变化和当期价格变化的自相关系数是协方差与两个标准差的乘积之比。由于我们给出的原因，市场精确度的增大会使标准差增大。因为事实（i），协方差将为零。但是在 Brock 和 LeBaron 模型中，当外部股份的净供给的协方差为正而且市场的精确度有限时，该协方差是正的。由于上述原因，假如市场精确度提高，这个协方差会减小。在这一模型的背景下，我们对事实（v）有一个解释。这个解释是否与现实中发现的任何依据相对应，仍然有待观察。然而，de Fontnouvelle(1995)在他更现实的模型中，可以产生 LeBaron（1992）效应。

以下讨论事实（i）。在 Brock 和 LeBaron（1995）的模型中，观测到的市场价格是基本值的一个预测器。因此，价格的差异代表了预测器的差异，如果基本值是随机游走，那么这使得模型很容易复制类型化（i）。de Fontnouvelle（1995）的模型在再现这个特征方面能够做得更好，因为这个模型更好地捕捉了在更高频时产生低自相关的各个瞬时间的驱动（temporal forces）。

以下，我们讨论最后一个事实（vi）。Brock 和 LeBaron 简单地讨论了其一般资产定价框架的模型与由 Brock(1993)构建的社会相互作用资产定价模型的关系。这个框架把是否购买

更多精确信息的选择决策中的社会相互作用与传统的资产定价模型融合在一起，产生的资产定价公式，在社会相互作用足够强的情况下，可以展示均衡资产价值的突变。这是因为考虑到大国经济的情况，相互作用使横截面的中心极限定理不能成立。

在 Brock 和 LeBaron 的模型中，考虑到大国经济的情况，横截面的中心极限定理不成立，所需的是选择的强度 (intensity of choice) 和社会相互作用强度的乘积足够大。换句话说，高强度的选择，即大量“理性”可以和少量“社会学”组合在一起，对环境中小变化产生大的反应。如果将选择的强度参数化为买还是不买信号的利润测度差异的一个函数，那么这类模型不仅能够使市场“跳跃”(jump)内生化，还可以在市场形成“相”(phase)。在“相”中，波动率和“超常收益”都是不同的。在高精确度的“相”中，因为市场对基本值“跟踪”得很好，波动率高，但是由于持有外部股份需要承担的风险很小，“超常”收益并不高。这可以看成是 Vaga(1994)的“粘着市场假设”(Coherent Market Hypothesis)和更传统的资产定价理论的一个综合。

这类建模可以产生看起来更象第3节讨论的 Hamilton 和 Susmel(1994)的“马尔可夫转换”模型的行为。当大多数交易者都拥有很多信息和当大多数交易者都不太拥有信息时，不同状态对应于不同的相。社会相互作用扩大了交易决策的粘着(coherence)，以致于交易者群体的行动更象是一“块”(clump)，而不是一组独立的随机变量。这种结块(clumping)可以产生更象马尔可夫转换的行为。第3节指出马尔可夫转换模型如何可以使波动率产生“伪”长期依赖。

当然，我们也不是要暗示说社会相互作用是可以使市场数据产生突变的、唯一的现实力量。参阅 Jacklin、Kleidon 和 Pfleiderer(1992)对诸如组合保险、过去的价格(stale prices)、交易机构等等的其他力量在产生象十月股市崩盘那样的突变中有关作用的讨论。

在本节中，我们已经讨论了关于“结构”模型的构建来再现相对高频的金融数据的共同特征方面、非常近期的研究工作。此外，利用象 Duffie 和 Singleton(1993)那样广泛使用计算机的方法，这类模型看来极其容易估计收益率和交易量数据。在计算机技术进步继续使计算成本降低的条件下，沿着本节讨论的研究路线，有可能运用以自助法为基础的设定检验来判断模型。对直接与金融利益相关的数量如交易利润进行的设定检验，可以比传统设定检验(模型被拒绝时如何修改模型)，为我们提供更好的信息。以下是一些简短的总结性评论。

## 5. 总结性评论

本文对金融中近期的一些研究工作进行了高度精选的文献综述。文献综述简短地讨论了：(i) 金融学中的“复杂理论”和它在生成“肥尾”收益率数据中可能起的作用；(ii) 频率现象；(iii) 非线性检验；(iv) 长期记忆检验；(v) 要小心流行检验中的矩条件失效。(vi) 检验矩条件的存在时产生的问题。(vii) 基于象交易利润这样的引人注目的金融数量，建立以自助法为基础的设定检验；(viii) 最近在使不对称信息结构建模标准化方面的一些努力。

考虑到这类研究工作对传统分析方法的挑战，我们相信将来的进展将使用象 Judd 和 Bernardo(1993)，Judd(1994)以及 Rust(1994)这样的、强化计算机的方法。基于强化计算机的方法，使得数据特征、结构建模和设定检验更紧密地联系在一起，设定检验通常使用与金融相关的数量如交易利润。

## 参考文献

- Abhyankar, A., L. Copeland, and W. Wang (1995). Nonlinear dynamics in real-time equity market indices: Evidence from the UK. *Econom. J.* to appear.
- Abhyankar, A. (1994). Linear and nonlinear granger causality: Evidence from the FT - SE100 index futures and cash markets. Department of Accountancy and Finance, University of Stirling, Scotland.
- Abu-Mostafa, Y. Chm. (1994). Proceedings of Neural Networks in the Capital Markets: NNCM '94, California Institute of Technology.
- Agiaklogtou, C. P. Newbold, and M. Woahr (1994). Lagrange multiplier tests for fractional difference. *J. Time Ser. Anal.* 15, 253-262.
- Akgiray, V. and G. C. Booth (1988). The stable-law model of stock returns. *J. Business Econom. Statist.* 6, 51-57.
- Akgiray, V. and C. Lamoureux (1989). Estimation of stable parameters: A comparative study. *J. Business Econom. Statist.* 7, 85-93.
- Altug, S. and P. Labadie (1994). *Dynamic Choice and Asset Markets*. New York: Academic Press.
- Andersen, T. (1995). Return volatility and trading volume: An information flow interpretation of stochastic volatility. Department of Finance, Kellogg School of Management, Northwestern University W.P. #170.
- Andersen, T. and T. Bollerslev (1994). Intraday seasonality and volatility persistence in foreign exchange and equity markets. Department of Finance, Kellogg School of Management, Northwestern University, W.P. #186.
- Andrews, D. (1991). Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation. *Econometrica* 59, 817-858.
- Anis, A. and E. Lloyd (1976). The expected values of the adjusted rescaled Hurst range of independent normal summands. *Biometrika* 63, 111-116.
- Antoniewicz, R. (1992). A causal relationship between stock returns and volume. Board of Governors, Federal Reserve System, Washington, D.C.
- Antouiewicz, R. (1993). Relative volume and subsequent stock price movements. Board of Governors, Federal Reserve System, Washington, D.C.
- Arthur, B., J. Holland, B. LeBaron, R. Palmer, and P. Tayler (1993). Artificial economic life: A simple model of a stockmarket. Santa Fe Institute, Working Paper.
- Aydogan, K. and G. Booth (1988). Are there long cycles in common stock returns.?' *South. Econom. J.* 55, 141-149.
- Auestad, B. and D. Tjostheim (1990). Identification of nonlinear time series: 1st order characterization and order determination. *Biometrika* 77, 669--687.
- Baek, E. and W. Brock (1992a). A general test for nonlinear Granger causality: Bivariate model. Mimeo, Department of Economics, University of Wisconsin-Madison.
- Baek, E. and W. Brock (1992b). A nonparametric test for temporal dependence in a vector of time series. *Statist. Sinica* 2, 137-156.
- Baillie, R. (1995). Long memory processes and fractional integration in Econometrics. *J. Econometrics* to appear.
- Baillie, R., T. Bollerslev, and H. Mikkelsen, (1993). Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Working Paper No. 168, Department of Finance, Northwestern University.

- Bak, R. and D. Chen (1991). Self-organized criticality. *Scientific American*, January.
- Barnett, W., R. Gallant, M. Hinich, J. Jungeilges, D. Kaplan and M. Jensen (1994). A single-blind controlled competition between tests for nonlinearity and chaos. Working Paper No. 190, Department of Economics, Washington University in St. Louis.
- Beran, J. (1992). A goodness of fit test for time series with slowly decaying serial correlations. *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B* 54, 749-760.
- Beran, J. (1993). Fitting long-memory models by generalized linear regression. *Biometrika* 80, 817-822.
- Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*. Chapman and Hall, New York.
- Bierens, H. (1990). A consistent conditional moment test of functional form. *Econometrica* 58, 1443-1458.
- Blattberg, R. C. and N. J. Gonedes (1974). A comparison of the stable and student distributions as statistical models for stock prices. *J. Business* 47, 244-280.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, ff. *Econometrics* 31, 307-327.
- Bollerslev, T., R. Engle, and D. Nelson (1994). ARCH models. In: R. Engle and D. McFadden, eds., *The handbook of Econometrics*, Vol. IV, North-Holland, Amsterdam.
- Bollerslev, T. and Mikkelsen, H. (1993). Modeling and pricing long-memory in stock market volatility. Working Paper No. 134, Department of Finance, Northwestern University.
- Bollerslev, T. and J. Wooldridge (1992). Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. *Econometric Rev.* 11, 143-172.
- Boothe, P. and D. Glassman (1987). The statistical distribution of exchange rates: Empirical evidence and economic implications, *J. Internat. Economics* 22, 297-320.
- Bradley, R. and R. McClelland (1994a). An improved nonparametric test for misspecification of functional form. Mimeo, Bureau of Labor Statistics.
- Bradley, R. and R. McClelland (1994b). A kernel test for neglected nonlinearity. Mimeo, Bureau of Labor Statistics.
- Breidt, J., N. Crato, and P. de Lima (1994). Modeling long memory stochastic volatility. *J. Econometrics*, to appear. Working Papers in Economics No. 323, Department of Economics, The Johns Hopkins University.
- Brock, W. (1982). Asset prices in a production economy. In: *The Economics of Uncertainty*, ed. by J.J. McCall, Chicago: University of Chicago Press.
- Brock, W. (1993). Pathways to randomness in the economy: Emergent nonlinearity and chaos in economics and finance. *Estudios Economicos* 8, El Colegio de Mexico, Enero-junio, 3-55.
- Brock, W. A., W. D. Dechert, and J. Scheinkman (1987). A test for independence based on the correlation dimension. Department of Economics, University of Wisconsin, University of Houston and University of Chicago. (Revised Version, 1991: Brock, W. A., W. D. Dechert, J. Scheinkman, and B. D. LeBaron), *Econometric Rev.* to appear.
- Brock, W., D. Hsieh, and B. LeBaron (1991). *A Test of Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability: Theory and Evidence*. M.I.T Press, Cambridge.
- Brock, W. and A. Kleidon (1992). Periodic market closure and trading volume: A model of intraday bids and asks. *J. Econ. Dynamic Control* 16, 451-489.
- Brock, W., L. Lakonishok, and B. LeBaron (1992). Simple technical trading rules and the stochastic properties of stock returns. *J. Finance* 47, 1731-1764.
- Brock, W. and B. LeBaron (1995). A dynamic structural model for stock return volatility and trading

- volume. Rev. Econ. Stat. to appear, NBER W.P. #4988.
- Brock, W. A. and S. M. Potter (1993). Nonlinear time series and macroeconometrics. In: G. S. Maddala, C. R. Rao, and H. Vinod, eds., Handbook of Statistics Volume 11: Econometrics, North Holland, New York.
- Brockwell, P. and R. Davis (1991). Time Series: Theory and Models. Springer-Verlag, New York.
- Cai, J. (1994). A Markov model of unconditional variance in ARCH. J. Business Econom. Statist. 12, 309-316.
- Campbell, J., S. Grossman, and J. Wang (1993). Trading volume and serial correlation in serial returns. Quart. J. Econom. 108, 905-939.
- Campbell, J., A. Lo, and C. MacKinlay (1993). The Econometrics of Financial Markets. Princeton University Press, to appear.
- Cheung, Y. (1993a). Tests for fractional integration: A Monte Carlo investigation. J. Time Ser. Anal. 14, 331-345.
- Cheung, Y. (1993b). Long memory in foreign exchange rates. J. Business Econom. Statist. 11, 93-101.
- Cheung, Y. and K. Lai (1993). Do gold markets have long-memory? Financ. Rev. 28, 181-202.
- Cheung, Y., K. Lai and M. Lai (1993). Are there long cycles in foreign stock returns? J. Internat. Financ. Markets, Institut. Money 3, 33-47.
- Clark, P. (1973). A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices. Econometrica 41, 135-155.
- Cochrane, J. (1988). How big is the random walk in GNP? J. Politic. Econom. 96, 893-920.
- Crato, N. (1994). Some international evidence regarding the stochastic memory of stock returns. Appl. Financ. Econom. 4, 33-39.
- Crato, N. and P. de Lima (1994). Long range dependence in the conditional variance of stock returns. Econom. Lett. 45, 281-285.
- Creedy, J. and V. Martin, (1994). Chaos and Non-linear Models in Economics: Theory and Applications. Brookfield, Vermont: Edward Elgar.
- Davies, R. and D. Harte (1987). Tests for Hurst effect. Biometrika 74, 95-102.
- De Fontnouvelle, P. (1995). Three Models of Stock Trading. PhD Thesis, Department of Economics, The University of Wisconsin, Madison.
- De Haan, L., S. Resnik, H. Rootzen and C. de Vrijs (1989). Extremal behavior of solutions to a stochastic difference equation with applications to ARCH-processes. Stochastic Processes and their Applications 32, 213-224.
- De Jong, R. (1992). The Bierens test under data dependence. Mimeo, Free University of Amsterdam.
- De Jong, R. and H. Bierens (1994). On the limit behavior of a chi-square type test if the number of conditional moments tested approaches infinity. Econometric Theory 9, 70-90.
- De Lima, P. (1994a). On the robustness of nonlinearity tests to moment condition failure. J. Econometrics, to appear, Working Papers in Economics No. 336, Department of Economics, The Johns Hopkins University.
- De Lima, P. (1994b). Nonlinearities and nonstationarities in stock returns. Mimeo, Department of Economics, The Johns Hopkins University.
- De Lima, P. (1995). Nuisance parameter free properties of correlation integral based statistics. Econometric Rev., to appear.
- De Vries, C. (1991). On the relation between GARCH and stable processes. J. Econometrics 48, 313-324.

- Dechert, W. D. (1988). A characterization of independence for a Gaussian process in terms of the correlation integral. University of Wisconsin SSRI W.P. 8812.
- Diebold, F. (1986). Modeling the persistence of conditional variances: Comment. *Econometric Rev.* 5, 51-56.
- Diebold, F. and J. Lopez (1995). Modeling volatility dynamics. In: K. Hoover, ed., *Macroeconomics: Developments, Tensions and Prospects*, Kluwer Publishing Co.
- Ding, Z., C. Granger, and R. Engle (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *J. Emp. Finance* 1, 83-106.
- Duffie, D. and K. Singleton (1993). Simulated moments estimation of Markov models of asset prices. *Econometrica* 61, 929-952.
- DuMouchel, W. (1983). Estimating the stable index  $\alpha$  in order to measure the tail thickness: A critique. *Ann. Statist.* 11, 1019-1031.
- Efron, B. and R. Tibshirani (1986). Bootstrap methods for standard errors, confidence intervals, and other measures of statistical accuracy. *Statist. Sci.* 1, 54-77.
- Ellis, R. (1985), *Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics*. New York, Springer-Verlag.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica* 50, 987-1007.
- Engle, R. and T. Bollerslev (1986). Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric Rev.* 5, 1-50.
- Fama, E. and K. French (1988). Permanent and temporary components of stock prices. *J. Politic. Econom.* 96, 246-273.
- Fielitz B. and J. Rozelle (1983). Stable distributions and the mixtures of distributions hypothesis for common stock returns. *J. Amer. Statist. Assoc.* 78, 28-36.
- Friedman, D. and J. Rust, eds., (1993). *The Double Auction Market: Institutions, Theories, and Evidence*. Addison-Wesley, Redwood City, California.
- Friggit, I. (1995). *Statistical mechanics of evaluative financial markets: Application to short term FOREX dynamics*. Essec Business School, near Paris, France.
- Gallant, R., P. Rossi, and G. Tauchen (1992). Stock prices and volume. *Rev. Financ. Stud.* 5, 199-242.
- Gallant, R., P. Rossi, and G. Tauchen (1993). Nonlinear dynamic structures. *Econometrica* 61, 871-907.
- Geweke, J. and S. Porter-Hudak (1983). The estimation and application of long memory time series models. *J. Time Set. Anal* 4, 221-238.
- Glosten, L., R. Jagannathan and D. Runkle (1994). Relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *J. Finance* 48, 1779-1802.
- Goetzman, W. (1993). Patterns in three centuries of stock market prices. *J. Business* 66, 249-270.
- Goldfeld, S. and R. Quandt (1973). A Markov model for switching regressions. *J. Econometrics* 1, 3-15.
- Goodhart, C. and M. O'Hara (1995). *High frequency data in financial markets: Issues and applications*. London School of Economics and Johnson Graduate School of Management, Cornell University.
- Granger, C. (1980). Long memory relationships and the aggregation of dynamic models. *J. Econometrics* 14, 227-238.
- Granger, C. and R. Joyeux (1980). An introduction to long-range time series models and fractional

- differencing. *J. Time Ser. Anal.* 1, 15-30.
- Granger, C. and J. Lin (1994). Using the mutual information coefficient to identify lags in nonlinear models. *J. Time Ser. Anal.* 1S, 371-384.
- Granger, C. and T. Terasvirta, (1993). *Modeling Nonlinear Economic Relationships*. Oxford University Press, Oxford.
- Greene M. and B. Fielitz (1977). Long-term dependence in common stock returns. *J. Financ. Econom.* 4, 339-349.
- Grossman, S. (1989). *The Informational Role of Prices*. Cambridge, MA.: MIT Press.
- Guillaume, D., M. Dacorogna, R. Dave', U. Muller, R. Olsen, and O. Pictet (1994). From the bird's eye to the microscope: A survey of new stylized facts of the intra-daily foreign exchange markets. Olsen and Associates, Zurich, Switzerland.
- Hall, P. (1982). On some simple estimates of an exponent of regular variation. *J. Roy. Statist. Soc.* 44, 37-42.
- Hall, P. (1994). Methodology and theory for the bootstrap. In: R. Engle and D. McFadden, eds., *The Handbook of Econometrics*, Vol. IV, North-Holland, Amsterdam.
- Hamilton, J. D. and R. Susmel (1994). Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime. *J. Econometrics* 64, 307-333.
- Harvey, A. C. (1993). Long memory in stochastic volatility. Mimeo, London School of Economics.
- Hiemstra, C. and J. Jones (1994a). Testing for linear and nonlinear Granger causality in the stock-volume relation. *J. Finance* 49, 1639-1664.
- Hiemstra, C. and J. Jones (1994b). Another look at long memory in common stock returns. Discussion Paper 94/077, University of Strathclyde.
- Hiemstra, C. and C. Kramer (1994). Nonlinearity and endogeneity in macro-asset pricing. Department of Finance, University of Strathclyde, Scotland.
- Hill, B. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Ann. Math. Statist.* 3, 1163-1174.
- Hinich, M. (1982). Testing for Gaussiainty and linearity of a stationary time series. *J. Time Ser. Anal* 3, 443-451.
- Hinich, M. and D. Patterson (1985). Evidence of nonlinearity in stock returns. *J. Business Econom. Statist.* 3, 69-77.
- Hodges, S. (1995). Arbitrage in a fractal Brownian motion market. Financial Options Research Centre, University of Warwick.
- Hong, Y. and H. White (1995). Consistent specification testing via nonparametric series regression. *Econometrica* 63, 1133-1159.
- Horgan, J. (1995). From complexity to perplexity: Can science achieve a unified theory of complex systems? Even at the Santa Fe Institute, some researchers have their doubts. *Sci. Amer.* 276, 104-109.
- Horowitz, J. (1995). Lecture notes on bootstrap. Lecture notes prepared for World Congress of the Econometric Soc., Tokyo, Japan, 1995.
- Hosking, J. (1981). Fractional differencing. *Biometrika* 68, 165-176.
- Hsieh, D. A. (1991). Chaos and nonlinear dynamics: Application to financial markets. *J. Finance* 46, 1839-1877.
- Hsu, D., R. Miller, and D. Wichern (1974). On the stable Paretian behavior of stock-market prices. *J. Amer. Statist. Assoc.* 69, 108-113.

- Hurst, H. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers* 116, 770-799.
- Inclan, C. (1993). GARCH or sudden changes in variance? An empirical study. Mimeo, Georgetown University.
- Jacklin, C., A. Kleidon, and P. Pfleiderer (1992). Underestimation of portfolio insurance and the crash of October 1987. *Rev. Financ. Stud.* 5, 35-63.
- Jaditz, T. and C. Sayers, (1993). Is chaos generic in economic data? *Internat. J. Bifurcations Chaos*, 745-755.
- Jansen, D. and C. de Vries (1991). On the frequency of large stock returns: Putting booms and busts into perspective. *Rev. Econom. Statis.* 73, 18-24.
- Jog, V. and H. Schaller (1994). Finance constraints and asset pricing Evidence on mean reversion. *J. Emp. Finance* 1, 193-209.
- Judd, K. (1994). *Numerical Methods in Economics*, to appear, Hoover Institute.
- Judd, K., A. Bernardo (1993). Asset market equilibrium with general securities, tastes, returns, and information, asymmetries. Working paper, Hoover Institution.
- Kim, M., C. Nelson and R. Startz (1991). Mean reversion in stock prices? A reappraisal of the empirical evidence. *Rev. Econom. Stud.*, 58, 515-528.
- Koedijk, K., M. Schafgans and C. de Vries (1990). The tail index of exchange rate returns. *J. Internat. Econom.* 29, 93-108.
- Kramer, C. (1994). Macroeconomic seasonality and the January effect. *J. Finance* 49, 1883-1891.
- Krugman, P. (1993). Complexity and emergent structure in the international economy. Department of Economics, Stanford University.
- Lamoureux, C. and W. Lastrapes (1990). Persistence in variance, structural change, and the GARCH model. *J. Business Econom. Statist.* 8, 225-234.
- Lamoureux, C. and W. Lastrapes (1994). Endogenous trading volume and momentum in stock return volatility. *J. Business Econom. Statist.* 12, 253-260.
- LeBaron, B. (1992). Some relations between volatility and serial correlations in stock returns. *J. Business* 65, 199-219.
- LeBaron, B. (1993). *Emergent Structures: a Newsletter of the Economics Research Program at the Santa Fe Institute*.
- LeBaron, B. (1994). Chaos and nonlinear forecastability in economics and finance. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* 348, 397-404.
- Lee, B.-J. (1988) A model specification test against the nonparametric alternative. Ph.D. Dissertation, University of Wisconsin.
- Lee, T., H. White, and C. Granger (1993). Testing for neglected nonlinearity in time series models, a comparison of neural network methods and alternative tests. *J. Econometrics* 56, 269-290
- Leger, C., D. Politis, and J. Romano (1992). Bootstrap technology and applications. *Technometrics* 34, 378-398.
- LePage, R. and L. Billard (1992). *Exploring the Limits of Bootstrap*. John Wiley and Sons: New York.
- Levich, R. and L. Thomas (1993). The significance of technical trading-rule profits in the foreign exchange market: A bootstrap approach. *J. Internat. Money Finance* 12, 451-474.
- Li, H. and G. S. Maddala (1995). Bootstrapping time series models. *Econometric. Rev.* to appear.
- Lo, A. (1991). Long-term memory in stock market prices. *Econometrics* 59, 1279-1313.
- Lo, A. and C. MacKinlay (1988). Stock markets do not follow random walks: Evidence from a simple

- specification test *Rev. Financ. Stud.* 1, 41-66.
- Loretan, M. (1991). Testing covariance stationarity of heavy-tailed economic time series, Ch. 3, Ph. D. Dissertation, Yale University.
- Loretan, M. and P. C. B. Phillips, (1994). Testing the covariance stationarity of heavy-tailed time series: An overview of the theory with applications to several financial datasets. *J. Emp. Finance* 1, 211-248.
- Lucas, R. (1978). Asset prices in an exchange economy. *Econometrica* 46, 1429-1445.
- Luukkonen, R., P. Saikkonen, and T. Terasvirta (1988). Testing linearity against smooth transition autoregressions. *Biometrika* 75, 491-499.
- Maddala, G. S. and H. Li (1996). Bootstrap based tests in financial models. In: G. S. Maddala, C. R. Rao, eds., *Handbook of Statistics 14: Statistical Methods in Finance*, North Holland, New York.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices, *J. Business* 36, 394-419.
- Mandelbrot, B. (1971). When can price be arbitrated efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale models. *Rev. Econom. and Statist.* 53, 543-553.
- Mandelbrot, B. (1975). Limit theorems of the self-normalized range for weakly and strongly dependent processes. *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* 31, 271-285.
- Mandelbrot, B. and M. Taqqu (1979). Robust R/S analysis of long run serial correlation. 42nd session of the International Statistical Institute, Manila, Book 2, 69-99.
- Mandelbrot, B. and J. Wallis (1968). Noah, Joseph, and operational hydrology. *Water Resources Research* 4, 967-988.
- McCulloch, H. (1995). Measuring tail thickness in order to estimate the stable index  $\alpha$ : A critique Department of Economics, Ohio State University.
- McCulloch, H. (1996). Financial applications of stable distributions. In: G. S. Maddala, and C. R. Rao, eds., *Handbook of Statistics Volume 14: Statistical Methods in Finance*. North Holland, New York.
- McLeod, A. and W. Li (1983). Diagnostic checking ARMA time series models using squared-residual autocorrelations. *J. Time Ser. Anal.* 4, 269--273.
- McFadden, D. (1989). A method of simulated moments for estimation of discrete response models without numerical integration. *Econometrica* 57, 995-1026.
- Mehra, R. (1991). On the volatility of stock market prices. Working Paper, Department of Economics, The University of California, Santa Barbara, *J. Emp. Finance*, to appear.
- Michener, R. (1984). Permanent income in general equilibrium. *J. Monetary Econom.* 14, 297-305.
- Mills, T. (1993). Is there long-term memory in UK stock returns?. *Appl. Financ. Econom.* 3, 293-302.
- Mittnik, S. and S. Rachev (1993). Modeling asset returns with alternative stable distributions. *Econometric Rev.* 12, 261-330.
- Nelson, D. B. (1990). Stationarity and persistence in the GARCH(I,1) model. *Econometric Theory* 6, 318-334.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica* 59, 347-370.
- Pagan, A. (1995). The econometrics of financial markets. Mimeo, The Australian National University and The University of Rochester.
- Pagan, A. and G. Schwert (1990). Testing for covariance stationarity in stock market data. *Econom. Lett.* 33, 165-170.
- Pakes, A. and D. Pollard (1989). Simulation and Asymptotics of optimization estimators.

- Econometrica 57, 1027-1057.
- Peters, E. (1994). *Fractal Market Analysis*. John Wiley & Sons, New York.
- Poterba, J. and L. Summers (1988). Mean reversion in stock returns: Evidence: and implications. *J. Financ. Econom.* 22, 27-60.
- Prigogine, I. and M. Sanglier, eds., (1987), *Laws of Nature and Human Conduct: Specificities and Unifying Themes*. G.O.R.D.E.S. Task Force of Research Information and Study on Science, Bruxelles, Belgium.
- Priesfly, M. (1988). *Non-linear and Non-stationary Time Series ,Analysis*. Academic Press, New York.
- Ramsey, J. B. (1969). Tests for specification errors in classical linear least-squares regression analysis. *J. Roy. Statist. Soc.* 31, 350-371.
- Randles, R. (1982). On the asymptotic normality of statistics with estimated parameters. *Ann. Statist.* 10, 462-474.
- Richardson, M. (1993). Temporary components of stock prices: A skeptic's View. *J. Business Econom. Statist.* 11, 199-207.
- Robinson, P. (1983). Nonparametric estimators for time series. *J. Time Ser. Anal.* 4, 185-207.
- Robinson, P. (1991a). Testing for strong serial correlation and dynamic conditional heteroskedasticity in multiple regression. *J. Econometrics* 47, 67--84.
- Robinson, P. (1991b). Consistent nonparametric entropy-based testing. *Rev. Econom. Stud.*, 58, 437-453.
- Robinson, P. (1993). Log-periodogram regression for time series with long range-dependence. Mimeo, London School of Economics.
- Rosen, S., K. Murphy, and J. Scheinkman (1994). Cattle Cycles. *J. Politic. Econom.* 102, 468-492.
- Rust, J. (1994). Structural estimation of Markov decision processes. In: R. Engle and D. McFadden, eds., *The Handbook of Econometrics*, Vol. IV, North-Holland, Amsterdam.
- Salkkonen, P. and R. Luukkonen (1988). Lagrange multiplier tests for testing non-linearities in time series models. *Scand. J. Statist.* 15, 55-58.
- Samorodnitsky, G. and M. Taqqu (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. Chapman and Hall, New York.
- Sargent, T. (1993). *Bounded Rationality in Macroeconomics*. Oxford: Clarendon Press.
- Sargent, T. (1995). Adaptation of macro theory to rational expectations. Working Paper, Department of Economics, University of Chicago and Hoover Institution.
- Savit, R. and M. Green (1991). Time series and dependent variables. *Physica D* 50, 521-544.
- Scheinkman, J. (1992). Stock returns and nonlinearities. In: P. Newman, M. Milgate, and J. Eatwell, *The New Palgrave Dictionary of Money and Finance*. London: MacMillan, 591-593.
- Scheinkman, J. and M. Woodford, (1994). Self-organized criticality and economic fluctuations. *Amer. Econom. Rev. Papers Proc.* May, 417-421.
- Simonato, J. G. (1992). Estimation of GARCH processes in the presence of structural change. *Econom. Lett.* 410, 155-158.
- Singleton, K. (1990). Specification and estimation of intertemporal asset pricing models. In: B. Friedman and F. Hahn, eds., *Handbook of Monetary Economics: I*. North Holland, Amsterdam.
- Smith., R., Chm. (1990). *Market Volatility and Investor Confidence: Report of the Board of Directors of the New York Stock Exchange, Inc.*, New York Stock Exchange: New York.
- Subba Rao, T. and M. Gabr (1980). A test for linearity of stationary time series. *J. Time Ser. Anal.* 1, 145-158.

- Summers, L. (1986). Does the stock market rationally reflect fundamental values? *J. Finance* 44, 1115-1153.
- Taylor, S. (1994). Modeling stochastic volatility: A review and comparative study. *Math. Finance* 4, 183-204.
- Thursby, J. G. and P. Schmidt (1977). Some properties of tests for specification error in a linear regression model *J. Amer. Statist. Assoc.* 72, 635-641.
- Tjøstheim, D. and B. Auestad (1994). Nonparametric identification of nonlinear time series: Selecting significant lags. *J. Amer. Statist. Assoc.* 89, 1410-1419.
- Tsay, R. (1986). Nonlinearity tests for time series. *Biometrika* 73, 461-466.
- Vaga, T. (1994). *Profiting from Chaos: Using Chaos Theory for Market Timing, Stock Selection, and Option Valuation*. New York: McGraw-Hill.
- Viano, M., C. Deniau and G. Oppenheim (1994). Continuous-time fractional ARMA processes, *Statist. & Probab. Lett.* 21, 323-336.
- Wallis, J. and N. Matalas (1970). Small sample properties of H and K, estimators of the Hurst coefficient h. *Water Resources Research* 6, 332.
- Wang, J. (1993). A model of intertemporal asset prices under asymmetric information. *Rev. Econom. Stud.*, 6, 405-434.
- Wang, J. (1994). A model of competitive stock trading volume. *J. Politic. Econom.* 102, 127-168.
- Weidlich, W. (1991). Physics and social science: The approach of synergetica. *Phy. Rep.* 204, 1-163.
- West, K., H. Edison, D. Cho (1993). A Utility-based comparison of some models of exchange rate volatility. *J. Internat. Econom.* 35, 23-45.
- White, H. (1987). Specification testing in dynamic models. In: Bewley T., ed., *Advances in Econometrics, Fifth World Congress, Volume 1*, Cambridge University Press, Cambridge.
- White, H. and J. Wooldridge (1991). Some results on sieve estimation with dependent observations. In: W. Barnett, J. Powel and G. Tauchen, eds., *Semiparametric and Nonparametric Methods in Economics and Statistics*, Cambridge University Press, New York.
- Wooldridge, J. (1992). A test for functional form against nonparametric alternatives. *Econometric Theory* 8, 452-475.
- Wu, P. (1992). Testing fractionally integrated time series. Mimeo, Victoria University of Wellington.
- Wu, K., R. Savit, and W. Brock (1993). Statistical tests for deterministic effects in broad band time series. *Physica D* 69, 172-188.
- Yatchew, A. (1992). Nonparametric regression tests based on an infinite dimensional least squares procedure. *Econometric Theory* 8, 452-475.
- Zolotarev, V. (1986). *One-dimensional Stable Distributions*, Vol. 65 of *Translations of mathematical monographs*. American Mathematical Society. Translation from the original 1983 Russian edition.