第四章　在金融学中的应用

当人们不完全了解行为的后果时，没有必要夸大实际理论在解释个人行为选择方面的重要性。

Arrow（1971, p.1）

1.　引言

本章我们将介绍几个随机方法在金融中应用的例子以说明第一、二章中讨论过的方法。为了使读者充分熟悉随机方法在现代金融中的应用，我们也包含了一些使用另外的方法的应用例子。

2.　随机通货膨胀率

在这一应用中我们将说明当通胀率遵循 $It\hat{o}$ 过程时，$It\hat{o}$ 引理在确定价格解和资产真实收益中的应用。分析仿照 Fischer（1975）的思想。

假定通胀率是随机过程且价格水平可由以下过程描述：

$$\frac{dP}{P} = \Pi dt + sdz \tag{2.1}$$

随机部分为 dz，其中 z 为维纳过程。过程的漂移率 Π 为每单位时间的期望通胀率。其定义为：

$$\Pi = \lim_{h\to 0} E_t \frac{1}{h}\left\{\frac{P(t+h)-P(t)}{P(t)}\right\} \tag{2.2}$$

这里 E_t 为在 $P(t)$ 值下的条件期望算子。过程的每单位时间的方差定义为：

$$s^2 = \lim_{h\to 0} E_t \frac{1}{h}\left\{\frac{P(t+h)-P(t)}{P(t)} - \Pi h\right\}^2 \tag{2.3}$$

由（2.2）、（2.3）所定义的 Π 和 s^2 满足一个离散时间的差分方程：

$$\frac{P(t+h)-P(t)}{P(t)} = \Pi h + sy(t)(h)^{\frac{1}{2}} \tag{2.4}$$

这里 $y(t)$ 为具有零期望值和单位方差的正态分布随机变量，且非时间相关。当 $h \to 0$ 时，把（2.4）中的变量 $sy(t)(h)^{\frac{1}{2}}$ 的极限描述为维纳过程，于是方程（2.1）可写作：

$$\frac{dP}{P} = \Pi dt + sy(t)(h)^{\frac{1}{2}} = \Pi dt + sdz$$

其中 $dz = y(t)(h)^{\frac{1}{2}}$。注意（2.1）告诉我们价格水平在很小的时间间隔内，成比例变化且为一期望是 Πdt、方差为 $s^2 dt$ 的正态分布。将（2.1）写为：

$$dP = P\Pi dt + Psdz \tag{2.5}$$

令

$$y(t) = P(0)\exp[(\Pi - \frac{s^2}{2})t + s\int_0^t dz] \tag{2.6}$$

利用 $It\hat{o}$ 引理可以证明 $y(t)$ 满足方程（2.5），令：

$$F(t,z) = P(0)\exp[(\Pi - \frac{s^2}{2})t + s\int_0^t dz]$$

计算 $\partial F/\partial t, \partial F/\partial z$ 和 $\partial^2 F/\partial z^2$ 如下：

$$\frac{\partial F}{\partial t} = P(0)\exp[(\Pi - \frac{s^2}{2})t + s\int_0^t dz](\Pi - \frac{s^2}{2}) = y(t)(\Pi - \frac{s^2}{2})$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = P(0)\exp[(\Pi - \frac{s^2}{2})t + s\int_0^t dz]s = sy(t)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = P(0)\exp[(\Pi - \frac{s^2}{2})t + s\int_0^t dz]s^2 = s^2 y(t)$$

这样，应用 $It\hat{o}$ 公式经过必要的变换我们最终得出：

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(dz)^2 \\ &= y(t)(\Pi - \frac{s^2}{2})dt + sy(t)dz + \frac{1}{2}s^2 y(t)(dz)^2 \\ &= y(t)\Pi dt - y(t)\frac{s^2}{2}dt + sy(t)dz + \frac{1}{2}s^2 y(t)dt \\ &= y(t)\Pi dt + y(t)sdz\,, \end{aligned}$$

即（2.6）满足方程（2.5）。

进一步的应用。考虑两个 $It\hat{o}$ 过程：

$$\frac{dP}{P} = \Pi dt + sdz \quad 和 \quad \frac{dQ}{Q} = rdt \tag{2.7}$$

我们利用 $It\hat{o}$ 引理计算变量 $q = u(P,Q) = Q/P$ 的随机过程。再次利用 $It\hat{o}$ 公式，此时有：

$$dq=\frac{\partial q}{\partial t}dt+\frac{\partial q}{\partial P}dP+\frac{\partial q}{\partial Q}dQ+\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 q}{\partial^2 P}dP^2+2\frac{\partial^2 q}{\partial P\partial Q}dPdQ+\frac{\partial^2 q}{\partial Q^2}dQ^2)$$

利用第二章（4.12）的乘法发则，计算出各项，结果为：

$$\begin{aligned}dq&=-\frac{Q}{P^2}dP+\frac{1}{P}dQ+\frac{1}{2}(\frac{2Q}{P^3})(Ps)^2dt\\&=-\frac{Q}{P^2}(\Pi Pdt+Psdz)+\frac{1}{P}(rQdt)+\frac{Q}{P}s^2dt\end{aligned}$$

最后得出：

$$\frac{dq}{q}=(r-\Pi+s^2)dt-sdz$$

这表示资产的真实收益相对比例变化率具有如（2.7）的正态收益。

3. Black-Scholes 期权定价模型

本节我们将跟随 Black 和 Scholes（1973）及 Merton（1973a）发展期权定价模型。考虑一种资产，如股票期权，用 A 表示，它在任一时刻 t 的价格可写作：

$$W(t)=F(S,t) \tag{3.1}$$

这里 F 为两阶连续可微函数。其中 $S(t)$ 为一其他资产 B 的价格，例如为期权的标的股票。B 的价格假定服从以下随机微分方程：

$$dS(t)=f(S(t),t)dt+\eta(S(t),t)dz(t) \tag{3.2}$$

$S(0)=S_0$ 给定。

考虑一个投资者建立了一个三种资产的投资组合，分为 A,B 和用 C 表示的无风险资产。我们假定 C 的收益率为 $r(t)$。该投资组合的名义价值为：

$$P(t)=N_1(t)S(t)+N_2(t)W(t)+Q(t) \tag{3.3}$$

这里 N_1 表示 B 的股数，N_2 表示 A 的股数，Q 为投资在无风险资产 C 的美元数。假定 B 无红利支付或其他分配。利用 $It\hat{o}$ 引理我们可计算出：

$$dW(t)=dF(t)=F(t)dt+F_S dS+\tfrac{1}{2}F_{SS}dS^2\equiv adt+bdz \tag{3.4}$$

这里：

$$a\equiv F_t+F_s f+\tfrac{1}{2}F_{SS}\eta^2\equiv\alpha_W W \tag{3.5}$$

$$b \equiv F_S \eta \equiv \sigma_W W \tag{3.6}$$

现在我们仿照 Black 和 Scholes（1973）的思想。假定一种特别简单的情形，即 $f(S,t)=\alpha S$，$\eta(S,t)=\sigma S$。这里α和σ为常数值。下面我们以比率形式写出在这种特殊的（3.2）情形中$S(t)$的动态方程：

$$\frac{dS}{S}=\alpha dt+\sigma dz \tag{3.7}$$

现在，考虑一种投资组合策略，设 N_1, N_2 相对于 S, W, t 的变化调整是相当缓慢的，即 $dN_1 = dN_2 = 0$。接着研究该组合的名义价值的变化 dP，即：

$$\begin{aligned}\frac{dP}{P} &= N_1(dS)+N_2(dW)+dQ \\ &= (\alpha dt+\sigma dz)N_1 S+(\alpha_W dt+\sigma_W dz)N_2 W + rQdt\end{aligned} \tag{3.8}$$

设 $W_1 = N_1 S/P, W_2 = N_2 S/P, W_3 = Q/P = 1-W_1-W_2$。则（3.8）变为：

$$dP=(\alpha dt+\sigma dz)W_1+(\alpha_W dt+\sigma_W dz)W_2+(rdt)W_3 \tag{3.9}$$

设计比例W_1和W_2的值以使在任一时刻$t \geq 0$使其处于无风险状态：

$$Var_t(\frac{dP}{P})=Var_t(W_1\sigma dz+W_2\sigma_W dz)=0 \tag{3.10}$$

这里Var_t为在$(S(t),W(t),Q(t))$条件下的方差，换句话说，选择$(W_1,W_2)=(\overline{W_1},\overline{W_2})$使得：

$$\overline{W_1}\sigma+\overline{W_2}\sigma_W = 0 \tag{3.11}$$

则由（3.9）：

$$E_t(\frac{dP}{P})=[\alpha\overline{W_1}+\alpha_W\overline{W_2}++r(1-\overline{W_1}-\overline{W_2})]dt=r(t)dt \tag{3.12}$$

由于组合是无风险的，方程（3.11 和（3.12）导出著名的 $Black-Scholes-Merton$ 方程：

$$\frac{\overline{W_1}}{\overline{W_2}}=-\frac{\sigma_W}{\sigma} \tag{3.13}$$

和

$$r=\alpha\overline{W_1}+\alpha_W\overline{W_2}-r\overline{W_1}-r\overline{W_2}+r \tag{3.14}$$

简化之为：

$$\frac{\alpha-r}{\sigma}=\frac{\alpha_W-r}{\sigma_W} \tag{3.15}$$

方程（3.15）表明每单位风险资产的净收益率对两种资产来讲是一定相同的。

对于进一步的特殊情形：

$$\alpha(S,t)=\alpha_0;\sigma(S,t)=\sigma_0;r(t)=r_0 \tag{3.16}$$

此处α_0,σ_0,r_0为常数，利用方程（3.15）和从（3.5）、（3.6）中作必要的代换，我们可得偏微分方程：

$$\tfrac{1}{2}\sigma_0^2S^2F_{SS}(S,t)+r_0SF_S(S,t)-r_0F(S,t)+F_t(S,t)=0 \tag{3.17}$$

它的边界条件由资产具体状况确定。对只有在到期日T才能执行且执行价格为E的期权，边界条件为：

$$\begin{aligned}&F(0,\tau)=0\,,\ \tau=T-t\\&F(S,T)=\max[0,S-E]\end{aligned} \tag{3.18}$$

令$W(S,\tau;E,r_0,\sigma_0^2)$表示相对于边界条件的解$F$。这个解由 Black-Scholes（1973）和 Merton（1973a）给出如下：

$$W(S,\tau;E,r_0,\sigma_0^2)=S\phi(d_1)-Ee^{-r_0\tau}\phi(d_2) \tag{3.19}$$

这里：

$$\phi(y)\equiv\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{y}e^{-s^2/2}ds \tag{3.20}$$

即标准正态分布函数，且：

$$d_1=[\log(\frac{S}{E})+(r_0+\frac{\sigma_0^2}{2})r]\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{3.21}$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{\tau}$$

4. 消费和投资组合规则

另外一些随机积分方法的应用可见 Merton（1971）。假设一种经济其所有资产均为有限责任型，存在连续交易的完全市场，对所有资产无交易费用，每股价格$P_i(t)$可由$It\hat{o}$过程产生，即：

$$\frac{dP_i}{P_i}=\alpha_i(P,t)dt+\sigma_i(P,t)dz_i \tag{4.1}$$

这里α_i为每单位时间价格的瞬态条件期望变化率，σ_i^2为每单位时间的瞬态条件方差。在假定资产价格服从几何布朗运动的特殊情形下，α_i和σ_i^2将为常数且价格是平稳过程并服从对

数正态分布。

为了得出正确的预算方程有必要先检验离散时间模型的公式，然后取极限得到连续时间形式。考虑单期模型，期长为h，其中所有收入均由资本收益产生。假定财富$W(t)$和$P_i(t)$在t期开始时均已知。采用下述记号：

$N_i(t)=t$期内，即t到$t+h$间（$h>0$），购买资产i的股数。

$C(t)=t$期内每单位时间消费量。

模型假定投资者进入t期时具有投资于资产的财富，满足：

$$W(t)=\sum_{i=1}^{n}N_i(t-h)P_i(t) \tag{4.2}$$

注意我们记为$N_i(t-h)$是由于它是我们在$t-h$到t期内为投资组合购买的股数，当前估价为$P_i(t)$。t期消费量$C(t)$和新组合$N_i(t)$的决定由已知的现价同时得出：

$$-C(t)h=\sum_{i=1}^{n}[N_i(t)-N_i(t-h)]P_i(t) \tag{4.3}$$

方程（4.2）和（4.3）增加 h，消去后向差分，得到：

$$\begin{aligned}-C(t+h)h&=\sum_{i=1}^{n}[N_i(t+h)-N_i(t)]P_i(t+h)\\&=\sum_{i=1}^{n}[N_i(t+h)-N_i(t)][P_i(t+h)-P_i(t)]\\&=\sum_{i=1}^{n}[N_i(t+h)-N_i(t)]P_i(t)\end{aligned} \tag{4.4}$$

和

$$W(t+h)=\sum_{i=1}^{n}N_i(t)P_i(t+h) \tag{4.5}$$

当$h\to 0$时对（4.4）和（4.5）取极限可知：

$$-C(t)dt=\sum_{i=1}^{n}dN_i(t)dP_i(t)+\sum_{i=1}^{n}dN_i(t)P_i(t) \tag{4.6}$$

类似地，

$$W(t)=\sum_{i=1}^{n}N_i(t)P_i(t) \tag{4.7}$$

利用$It\hat{o}$引理对$W(t)$取微分，得：

$$dW(t)=\sum_{i=1}^{n}N_i(t)dP_i(t)+\sum_{i=1}^{n}dN_i(t)P_i(t)+\sum_{i=1}^{n}dN_i(t)dP_i(t) \tag{4.8}$$

（4.8）式的最后两项 $\sum_{i=1}^{n}dN_i(t)P_i+\sum_{i=1}^{n}dN_i(t)dP_i$ 为从非资本收益中新增财富的净值。若 $dy(t)$ 定义为非资本收益的即时现金流如工资收入，则：

$$dy-C9t)dt=\sum_{i=1}^{n}dN_iP_i+\sum_{i=1}^{n}dN_idP_i$$

由此得预算方程：

$$dW=\sum_{i=1}^{n}N_i(t)dP_i+dy-C(t)dt \tag{4.9}$$

定义新变量 $\omega_i(t)=N_i(t)P_i(t)/W(t)$，并利用（4.1）得：

$$dW=\sum_{i=1}^{n}\omega_iW\alpha_idt-Cdt+dy+\sum_{i=1}^{n}\omega_iW\sigma_idz_i \tag{4.10}$$

Merton（1971）假设 $dy=0$ 即所有收入都来源于资本收益，且 $\sigma_n=0$，即第 n 种资产为无风险资产。这样，令 $\alpha_n=r$，

$$dW=\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i(\alpha_i-r)Wdt+(rW-C)dt+\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i\sigma_iWdz_i$$

便为预算约束。

对将要生活 T 年的个人，选择最优投资组合和消费选择的问题现在可以表述如下：

$$\max E_0[\int_0^T u(C(t),t)dt+B(W(T),T)] \tag{4.11}$$

满足：

$$W(t)\geq 0 \quad (\forall t\in[0,T] \tag{4.12}$$

$$dW=\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i(\alpha_i-r)Wdt+(rW-C)dt+\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i\sigma_iWdz_i \tag{4.13}$$

这里 u 和 B 关于 C 和 W 严格凹。

为了推导最优法则，我们利用第二章所提随机动态规划方法。定义：

$$J(W,P,t)=\max_{\{C,\omega\}}E_t[\int_t^T u(C,s)ds+B(W(T),T)] \tag{4.14}$$

并记：

$$\phi(\omega, C, W, P, t) = u(C,t) + L[J] \tag{4.15}$$

此处：

$$\begin{aligned} L = &\frac{\partial}{\partial t} + [\sum_{i=1}^{n} \omega_i \alpha_i W - C] \frac{\partial}{\partial W} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i \frac{\partial}{\partial P_i} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_1^n \sum_1^n \sigma_{ij} \omega_i \omega_j W^2 \frac{\partial^2}{\partial W^2} + \frac{1}{2} \sum_1^n \sum_1^n \sigma_{ij} P_i P_j \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \\ &+ \sum_1^n \sum_1^n P_i W \omega_j \sigma_{ij} \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial W} \end{aligned} \tag{4.16}$$

。

在问题的假设条件下，存在一个最优ω^*和C^*，满足：

$$\begin{aligned} 0 &= \max_{\{C,\omega\}} \{\phi(C, \omega; W, P, t)\} \\ &= \phi(C^*, \omega^*; W, P, t) \quad ,\text{对所有} t \in [0,\ T] \end{aligned} \tag{4.17}$$

在通常情况下，为带约束条件的最大化问题，我们可定义 Lagrangian 函数：

$L \equiv \phi + \lambda[1 - \sum_{i=1}^{n} \omega_i]$，并得出一阶条件

$$0 = L_C(C^*, \omega^*) = u_C(C^*, t) - J_W \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} 0 = L_{\omega_k}(C^*, \omega^*) &= -\lambda + J_W \alpha_k W + J_{WW} \sum_1^n \sigma_{kj} \omega_j^* W^2 \\ &+ \sum_1^n J_{jW} \sigma_{kj} P_j W \quad , k = 1,2,\dots n , \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$0 = L_\lambda(C^*, \omega^*) = 1 - \sum_1^n \omega_i^* \tag{4.20}$$

Merton 解出ω^*和C^*并代入（4.17）和（4.15）得出一个复杂的偏微分方程，见 Merton（1971, p.383）。若此偏微分方程对 J 可解，则它的解经过适合变换即可得出最优消费C^*和投资组合ω^*选择。

5. 双曲型绝对风险厌恶函数

在本应用中，我们具体化前一节的 Merton（1971）的分析。讨论如下的双曲型绝对风险厌恶 ($HARA$) 效用函数：

$$u(C,t) = e^{-\rho t} v(C)$$

这里：

$$v(C)=\frac{1-\gamma}{\gamma}(\frac{\beta C}{1-\gamma}+\eta)^{\gamma} \tag{5.1}$$

注意，绝对风险厌恶用 $A(C)$ 表示，定义为 $A(C)=-(v''/v')$ 。那么：

$$A(C)=-\frac{v''}{v'}=\frac{1}{\frac{C}{1-\gamma}+\frac{\eta}{\beta}}>0 \tag{5.2}$$

只要 $\gamma\neq 1;\beta>0,(\beta C/(1-\gamma))+\eta>0$，且若 $\gamma=-\infty$ 时， $\eta=1$ 。

这样的效用函数有许多，因为只要适当调整其中一个参数就可对应具有绝对或相对风险厌恶的效用函数，它是增的、减的或者为常数。

为不失一般性，假定有两个资产，其一为无风险资产，另一个为风险资产。已知无风险资产收益为 r，风险资产价格遵循对数正态分布：

$$\frac{dP}{P}=\alpha dt+\sigma dz \tag{5.3}$$

这种情况下的最优方程为：

$$\begin{aligned}0=&\frac{(1-\gamma)^2}{\gamma}e^{-\rho t}[\frac{e^{\rho t}J_W}{\beta}]^{\gamma/(\gamma-1)}+J_t\\&+[(1-\gamma)\frac{\eta}{\beta}+rW]J_W-\frac{J_W^2}{J_{WW}}\frac{(\alpha-r)^2}{2\alpha\sigma^2}\end{aligned} \tag{5.4}$$

满足 $J(W,T)=0$ 。为简单起见我们假定个人拥有零遗产函数。

（5.4）中的偏微分方程的解由 Merton（1973c, p.213）给出：

$$\begin{aligned}J(W,t)=&\frac{\delta}{\gamma}\beta^{\gamma}e^{-\rho t}[\frac{\delta\left\{1-\exp[-(\frac{\rho-\gamma v}{\delta})(T-t)]\right\}}{\rho-\delta v}]^{\delta}\\&[\frac{W}{\delta}+\frac{\eta}{\beta r}\{1-\exp[-r(T-t)]\}]^{\gamma}\end{aligned} \tag{5.5}$$

这里 $\delta=1-\gamma,v=r+(\alpha-r)^2/2\delta\sigma^2$ 且 δ 假定为正。若 $\delta<0$，那么 $r>1$，则（5.5）中的解 $J(W,t)$ 仅在 $0\le W(t)\le(\gamma-1)\eta[1-\exp(-r(T-t))]/\beta r$ 时成立。

最优消费与投资组合选择的显示解如下：

$$C^*(t)=\frac{[\rho-\gamma v][W(t)+\frac{\delta\eta}{\beta r}\{1-\exp[r(t-T)]\}}{\delta\left\{1-\exp[\frac{\rho-\gamma v}{\delta}(t-T)]\right\}}-\frac{\delta\eta}{\beta} \tag{5.6}$$

和

$$\omega^*(t)=\frac{\alpha-r}{\delta\sigma^2}+\frac{1}{W(t)}\frac{\eta(\alpha-r)}{\beta r\sigma^2}\{1-\exp[r(t-T)]\} \tag{5.7}$$

对以上两个方程稍加观察可知需求函数关于财富是线性的，这表示$HARA$是唯一一族蕴含线性解的凹效用函数。

6. 投资组合跳跃过程

我们用 Merton（1971）方法来讨论在投资组合问题中跳跃过程最大值原理的应用。考虑两资产情形，其一为价格服从对数正态分布的普通股票，另一个是在无违约情况下支付即期利率r，在违约情况下其价格为零的风险债券。生成这种债券价格过程的假定如下：

$$dP=rPdt-Pdq \tag{6.1}$$

其中$q(t)$为独立泊松过程。代替（4.13）的新预算方程为：

$$dW=\{\omega W(\alpha-r)+rW-C\}dt+\omega\sigma Wdz-(1-\omega)Wdq \tag{6.2}$$

注意（6.2）为混合维纳和泊松过程的动态系统的一个例子。利用一般的$It\hat{o}$公式和第二章第12 节跳跃过程的最大值原理，得最优方程：

$$\begin{aligned}0&=u(C^*,t)+J_t(W,t)+\lambda[J(\omega^*W,t)-J(W,t)]\\&\quad+J_W(W,t)[(\omega^*(\alpha-r)+r)W-C^*]+\frac{1}{2}J_{WW}(W,t)\sigma^2\omega^{*2}W^2\end{aligned} \tag{6.3}$$

这里最优消费为C^*和投资组合ω^*由如下隐式方程确定：

$$0=u_C(C^*,t)-J_w(W,t) \tag{6.4}$$

和

$$0=\lambda J_W(\omega^*W,t)+J_W(W,t)(\alpha-r)+J_{WW}(W,t)\sigma^2\omega^*W \tag{6.5}$$

在这个 Merton 问题中，存在着额外的新东西，它在纯粹的布朗运动情形下没有介绍。也就是说，对于$HARA$效用函数，你不仅必须从$J(W,t)=g(t)W^{\alpha}$猜出解和通过取指数法求出指数解，而且还必须猜出需求函数的形式$\omega W=dW+e$，其中d项是独立于财富的。如果给定分离定理，即对于双曲型绝对风险厌恶类效用函数，风险资产所占财富的比例应与投资者的财富水平和他的年龄无关，那么推测出风险资产的需求函数形式是自然的。现假设泊松情形也有类似的分离定理。进一步，推测e项为 0。这很显然，若财富为 0 就不会有对风险资产的需求。

其次，使状态函数J的偏微分方程中财富上的指数相等，可求出财富上的未知指数。结果表明，它与效用函数中消费上的指数是一样的。删除状态函数的偏微分方程（6.3）中的所有涉及财富的项，将给出一个关于未知函数$g(t)$的常微分方程。进一步，考察必要条件（6.5）

就可确定未知比例 d 。在必要条件（6.5）中删除所有涉及财富和未知函数 $g(t)$ 的项，可得如下关系：

$$d=\frac{\alpha-r}{\sigma^2(1-\gamma)}+\frac{\lambda}{\sigma^2(1-\gamma)}d^{\gamma-1} \tag{6.6}$$

最后这一式子与 Merton（1971，p.391）中的 $\omega=d$ 时的情形（Merton（80’））是一致的。这样，对风险资产具有线性需求的假设成立。

这段推导无疑是在泊松情况下，为了得出一个封闭形式的解，猜测风险资产需求函数的形式所必需的。不过对需求函数适当形式的假设还是来源于在纯布朗运动情形下的需求函数形式的推导。换句话说，在布朗运动情形下，当效用函数为双曲型风险厌恶类时，则其风险资产的需求函数为线性的，投资者组合中风险资产的持有比例与投资者的财富水平和他或她的年龄无关。这种无关性称为分离定理。分离定理名字的来源，在这种情形下消费决策与投资多样化决策是各自独立作出的。

Merton（1971）的文章包含了在泊松过程下闭形式解确定的其他几个例子。更进一步，它还包含在更一般的过程下闭形式解的确定问题。

7. 指数债券的需求

像 Fischer（1975）那样，考虑一个家庭，它拥有一个三种资产的资产组合：真实债券、风险资产和名义债券。假定组合可以随时无成本地调整比例。同时假定通胀率是随机的，且由以下过程描述：

$$\frac{dP}{P}=\pi dt+sdz \tag{7.1}$$

真实债券支付真实收益率 r_1， r_1 加实际通胀率为名义收益率。注意：

$$\frac{dQ_1}{Q_1}=r_1dt+\frac{dP}{P}=(r_1+\Pi)dt+sdz\equiv R_1dt+s_1dz_1 \tag{7.2}$$

是描述关于指数债券的名义收益的方程。股票的名义收益为：

$$\frac{dQ_2}{Q_2}=R_2dt+s_2dz_2 \tag{7.3}$$

这里 R_2 为每单位时间股票的期望名义收益， s_2^2 为每单位时间名义收益的方差。利用应用 2 的结果，若我们令 $dQ_3/Q_3=R_3dt$ 描述名义债券的确定的名义收益，则关于名义债券的实际收益为：

$$\frac{d(Q_3/P)}{Q_3/P}=(R_3-\pi+s_1^2)dt-s_1dz_1\equiv r_3dt-s_1dz_1 \tag{7.4}$$

令 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 分别为组合中持有真实债券、股票、名义债券的比例。显然 $\omega_1+\omega_2+\omega_3=1$。预算约束（给出名义财富 W 的变化）类似于（4.10）：

$$dW=\sum_1^3\omega_i R_i Wdt-PCdt+\sum_1^2\omega_i s_i Wdz_i \tag{7.5}$$

这里 C 为消费率。名义财富变化的不确定性产生于真实债券和股票的持有。因为 $\omega_3=1-\omega_1-\omega_2$，我们改写方程（7.5）为：

$$dW=\sum_1^2\omega_i(R_i-R_3)Wdt-(R_3W-PC)dt+\sum_1^2\omega_i s_i Wdz_i \tag{7.6}$$

我们现在将此家庭选择问题公式化为

$$\max_{\{C,\omega_i\}}E_0\int_0^\infty u[C(t),t]dt \tag{7.7}$$

满足（7.6）和

$$W(0)=W_0$$

这里 u 为 C 的严格凹效用函数，E_0 为关于 $P(0)$ 的条件期望。

最优性的一阶必要条件为：

$$0=u_C(C,t)-PJ_W \tag{7.8}$$

$$0=J_W(R_1-R_3)+J_{WW}W(\omega_1 s_1^2+\omega_2\rho s_1 s_2)+J_{WP}Ps_1^2 \tag{7.9}$$

$$0=J_W(R_2-R_3)+J_{WW}W(\omega_2 s_2^2+\omega_1\rho s_1 s_2)+J_{WP}P\rho s_1 s_2 \tag{7.10}$$

类似于前面，这里：

$$J(W,P,t)=\max_{\{C,\omega_i\}}E_t\int_t^\infty u(C,s)ds$$

ρ 为维纳过程 dz_1 和 dz_2 的瞬时相关系数，$|\rho|<1$。现在利用方程（7.9）和(7.10)及 $\sum\omega_i=1$ 的事实，我们可以解出资产需求，得：

$$\omega_1=-\frac{J_W}{J_{WW}W}\left[\frac{R_1-R_3}{s_1^2(1-\rho^2)}-\frac{\rho(R_2-R_3)}{s_1 s_2(1-\rho^2)}\right]-\frac{J_{WP}P}{J_{WW}W} \tag{7.11}$$

$$\omega_2=-\frac{J_W}{J_{WW}W}\left[\frac{R_2-R_3}{s_2^2(1-\rho^2)}-\frac{\rho(R_2-R_3)}{s_1 s_2(1-\rho^2)}\right] \tag{7.12}$$

$$\omega_2 = \frac{J_W}{J_{WW}W}\left[\frac{(R_1-R_3)(s_2-\rho s_1)}{s_1^2 s_2(1-\rho^2)} + \frac{(R_2-R_3)(s_1-\rho s_2)}{s_1 s_2^2(1-\rho^2)}\right] - 1 \tag{7.13}$$

利用（7.11）-（7.13）Fischer（1975）研究了这三个资产的需要函数的全部性质。特别，考虑一下（7.11）中指数债券的需求函数。显然，系数$-\frac{J_W}{J_{WW}W}$为家庭相对风险厌恶度的倒数。若我们简单地假设（7.11）中的$\rho = 0$，则（7.11）说明指数债券的需求依赖于（i）相对风险厌恶度，（ii）两种债券期望名义收益间的差值$R_1 - R_3$和（iii）通货膨胀的方差s_1^2。然而，（7.11）中的$\frac{J_{WP}P}{J_{WW}W}$项又代表什么呢？这一项可以用相对风险厌恶度表示如下：

$$J_{WP}P / J_{WW}W = -J_W / J_{WW}W - 1 \tag{7.14}$$

为得到（7.14）我们首先对（7.8）关于P求导得：

$$u_{CC}\frac{\partial C}{\partial P} = J_W + PJ_{WP} \tag{7.15}$$

关于W求导得：

$$u_{CC}\frac{\partial C}{\partial W} = PJ_{WW} \tag{7.16}$$

最后，注意到消费为实际财富的函数：

$$\frac{\partial C}{\partial P} = -\frac{W}{P}\frac{\partial C}{\partial W} \tag{7.17}$$

综合（7.15）—（7.17），我们得（7.14）。

这段分析揭示出很多其他有价值的观点。我们仅举一例。当$\omega_1 = 0$，即当家庭投资组合中没有指数债券时，按照实际收益计算的收益差为：

$$r_1 - r_3 = -\frac{J_{WW}}{J_W}[(\rho s_1 s_2 - s_1^2)\omega_2 - s_1^2(1-\omega_2)] \tag{7.18}$$

假定$\omega_2 = 1$即真实和名义债券的净量均为 0。如果股票收益和通货膨胀间有正的协方差，则由（7.18）我们可知$r_1 - r_3 > 0$。这表示指数债券将不得不支付比名义债券的期望实际收益更高的收益。换句话说，若股票为抵御通胀的套期保值，指数债券将无法控制名义债券的溢价。相反地，若股票不是针对通胀的套期保值，则指数债券将可控制名义债券的溢价。

8. 有效市场中的期限结构

类似于 Black-Scholes（1973）和 Merton（1971）曾使用的，前几节已介绍过的随机微积

分方法也被 Vasicek（1977）用来给出有效市场利率期限结构的显式描述。按照 Vasicek 的方法，我们描述这种模型如下：

令 $P(t,s)$ 表示到期时间为 s 的贴现债券在 t 时刻的价格，这里 $t \le s$。债券假定有单位到期价格，即：

$$P(s,s)=1 \tag{8.1}$$

到期收益 $R(t,T)$ 为到期日 $s=t+T$ 的债券的内在收益率，给出如下：

$$R(t,T)=-\frac{1}{T}\log P(t,t+T)\,,\ T>0 \tag{8.2}$$

由（8.2）收益率 $R(t,T)$ 作为 T 的函数将定义为时刻 t 的期限结构。我们利用（8.2）定义即期利率为瞬时借贷利率 $r(t)$，即：

$$r(t)=R(t,0)=\lim_{T\to 0}R(t,T) \tag{8.3}$$

假定 $r(t)$ 是时间的连续函数，且由随机微分方程

$$dr=f(r,t)dt+\rho(r,t)dz \tag{8.4}$$

描述。这里，类似于前面，$z(t)$ 为具有单位方差的维纳过程。假定贴现债券的价格 $P(t,s)$ 是由整个债券期限内即期利率过程（8.4）在 t 时刻的估值所确定，这样我们可记作：

$$P(t,s)\equiv P(t,s,r(t)) \tag{8.5}$$

方程（8.5）显示出即期利率是整个期限结构中唯一的状态变量，这意味着不同到期日的债券的瞬时收益是高度相关的。最后，我们假定无交易费用，信息同时对所有投资者可知和投资者是理性的；也就是说，我们假定市场是有效的。这一假定表示不存在无风险套利机会。

由（8.4）和（8.5）式，通过 $It\hat{o}$ 引理我们可得如下随机微分方程：

$$dP=P\mu(t,s,r(t))dt-P\sigma(t,s,r(t))dz \tag{8.6}$$

它描述了债券价格的变化。在（8.6）中函数 μ 和 σ 定义如下：

$$\mu(t,s,r)=\frac{1}{P(t,s,r)}[\frac{\partial}{\partial t}+f\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{2}e^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}]P(t,s,r) \tag{8.7}$$

$$\sigma(t,s,r)=\frac{1}{P(t,s,r)}\rho\frac{\partial}{\partial r}P(t,s,r) \tag{8.8}$$

现在考虑由下式给出的量 $q(t,r(t))$：

$$q(t,r)=\frac{\mu(t,s,r)-r}{\sigma(t,s,r)} \qquad (t\le s) \tag{8.9}$$

我们称其为风险的市场价格，它表明每增加一单位风险债券的期望瞬时收益率的增量。将（8.7）和（8.8）中μ和σ的表达式代入（8.9），作必要的变换得出期限结构方程如下：

$$\frac{\partial P}{\partial t}+(f+\rho q)\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{2}\rho^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}-rP=0 \tag{8.10}$$

注意（8.10）式为一偏微分方程，一旦即期利率过程$r(t)$和风险的市场价格$q(t,r)$给定，解P就可得到。（8.10）的边界条件为：

$$P(s,s,r)=1 \tag{8.11}$$

求出方程（8.10）满足条件（8.11）的解$P(t,s,r)$，这就可由（8.2）得出期限结构。

Vasicek（1977）利用 Friedman（1975）中的方法给出了债券价格的表达式，即作为满足条件（8.11）的期限结构方程（8.10）的一个解，

$$P(t,s)=E_t\exp(-\int_t^s r(u)du-\frac{1}{2}\int_t^s q^2(u,r(u))du+\int_t^s q(u,r(u))dz(u)\text{，}\quad t\le s \tag{8.12}$$

为了给出方程（8.12）的一些经济意义，构造一个由到期日趋向无穷的债券，称为长期债券，组成的投资组合以即期利率买进卖出且比例分别为$\lambda(t)$和$1-\lambda(t)$。此处我们定义$\lambda(t)$为：

$$\lambda(t)=\frac{\mu(t,\infty)-r(t)}{\sigma^2(t,\infty)} \tag{8.13}$$

即：

$$\lambda(t)\sigma(t,\infty)=q(t,r(t)) \tag{8.14}$$

这个组合的价值$Q(t)$满足方程：

$$dQ=\lambda Q(\mu(t,\infty)dt-\sigma(t,\infty)dz)+(1-\lambda)Qrdt \tag{8.15}$$

通过计算$\log Q$的微分和利用（8.14），方程（8.15）可以被积分，得：

$$\begin{aligned}d(\log Q)&=\lambda\mu(t,\infty)dt-\lambda\sigma(t,\infty)dz+(1-\lambda)rdt-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2(t,\infty)dt\\&=rdt+\frac{1}{2}q^2dt-qdz\end{aligned}$$

由此可知：

$$\frac{Q(t)}{Q(s)} = \exp(-\int_t^s r(u)du - \frac{1}{2}\int_t^s q^2(u,r(u))du + \int_t^s q(u,r(u))dz)$$

利用最后这个方程，我们可以把（8.12）重写为：

$$P(t,s) = E_t \frac{Q(t)}{Q(s)} \qquad (\forall t \le u \le s)$$

由此，我们得出，若某一时刻t的债券价格为组合Q价值的一个确定比例，则将来仍保持这一比例。

9. 在项目评估中的市场风险调整

本应用中我们将遵循 Constantinides（1978）所发展的规则，即将存在市场风险的估价问题转化为风险价格为零情况下的估价问题。

令$V(x,t)$表示某一项目的市场价值，其中这个项目可以选择为一项投资，一种期权，一种厂商权益等。假定项目可以生成一系列现金流，$V(x,t)$表示这一现金流的时间和风险调整价值。市场价值函数$V(x,t)$由状态变量x和时间t确定，这里我们假定x变化遵循如下随机微分方程：

$$\begin{aligned} dx &= \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dz \\ &= \mu dt + \sigma dz \end{aligned} \qquad (9.1)$$

其中，为了记号的简便，我们记$\mu \equiv \mu(x,t), \sigma \equiv \sigma(x,t)$。类似于以前，(9.1）中的$z$为一具有单位方差的维纳过程。项目在时间区间$(t,t+dt)$内所生成的现金收益假定为非随机的，并由$cdt$给出，这里$c = c(x,t)$。

现在考虑项目在时间区间$(t,t+dt)$内的收益，它是资本增值$dV(x,t)$和现金收益cdt的和。为了得到$dV(x,t)$，我们利用$It\hat{o}$引理

$$dV(x,t) = (V_t + \mu V_x + \frac{\sigma^2}{2}V_{xx})dt + \sigma V_x dz \qquad (9.2)$$

假定$V(x,t)$有对x的二阶连续偏导和对t的一阶连续偏导数。利用（9.2）我们可以给出项目的收益率为：

$$\frac{dV(x,t)+cdt}{V(x,t)}=\frac{1}{V}(c+V_t+\mu V_x+\frac{\sigma^2}{2}V_{xx})dt+\frac{\sigma V_x}{V}dz \tag{9.3}$$

由（9.3）我们可以写出每单位时间内的期望值α_P和每单位时间内与市场的协方差σ_{PM}，它们为：

$$\alpha_P=(c+V_t+\mu V_x+\frac{\sigma^2}{2}V_{xx})/V \tag{9.4}$$

和

$$\sigma_{PM}=\rho\sigma_M\sigma V_x/V \tag{9.5}$$

这里$\rho=\rho(x,t)$为dz和市场收益间的瞬时相关系数。(9.5）中的σ_M为市场组合方差的正平方根。

关于这一点，Constantinides（1978）利用了由 Merton（1973b）证明且在 Merton（1972）中陈述给出的结论。在陈述这一结果前，我们先引进记号。令α_i表示单位时间内证券i的期望收益率，σ_{ij}为单位时间内收益的协方差。无风险的借贷利率用r表示，下标M表示市场投资组合。结论为：在一定的假设条件下， Merton（1973）的即时资本资产定价模型成立，均衡的证券收益一定满足方程：

$$\alpha_i-r=\beta_i(\alpha_M-r) \tag{9.6}$$

这里$\beta_i=\sigma_{iM}/\sigma_M^2$。注意，(9.6）是经典的资本资产定价模型的证券市场线在连续时间下的类似物。参见 Francis 和 Archer（1979, p.158）。为了达到我们的目的，改写（9.6）为：

$$\alpha_i-r=\lambda\sigma_{iM}/\sigma_M \tag{9.7}$$

这里$\lambda\equiv(\alpha_M-r)/\sigma_M$。将（9.4）和（9.5）代入（9.7）得：

$$c-rV+V_t+(\mu-\lambda\rho\sigma)V_x+\frac{\sigma^2}{2}V_{xx}=0 \tag{9.8}$$

这是一个偏微分方程。在确定的边界条件下，我们可以得到其解$V(x,t)$，以给出项目的市场价值。为了进一步分析，令：

$$\mu^*=\mu^*(x,t)\equiv\mu(x,t)-\lambda\rho(x,t)\sigma(x,t) \tag{9.9}$$

并改写（9.8）为：

$$c - rV + V_t + \mu^* V_x + \frac{\sigma^2}{2} V_{xx} = 0 \quad (9.10)$$

下面，我们想比较一下（9.10）和另一个类似的方程。后者描述在没有市场风险溢价（即 $\alpha_M - r = 0$）的资本市场中的项目的价值。在（9.6）中，令 $\alpha_M - r = 0$ 并利用（9.4）和（9.5），可得：

$$c - r\hat{V} + \hat{V}_t + \mu \hat{V}_x + \frac{\sigma^2}{2} \hat{V}_{xx} = 0 \quad (9.11)$$

这里 $\hat{V}(x,t)$ 表示没有风险溢价下的资本市场中的项目的价值。（9.11）中的边界条件相同于加在（9.10）中的 V 的条件，因为这些条件是独立于市场风险溢价的。

通过比较（9.10）和（9.11）两方程，我们得出这节应用的结论。比较显示 $V(x,t)$ 可以看作为无风险溢价资本市场中的项目的市场价值，只需用 $\mu^*(x,t)$ 替换 $\mu(x,t)$。这一发现导致了 Constantinides（1978）提出确定项目的市场价值的下述规则。首先，如（9.9）那样，将趋势 $\mu(x,t)$ 替换为 $\mu^*(x,t)$。然后，以无风险利率贴现期望现金流。

10. 现金平衡的需求

现行的各种用来解释货币需求的模型可以分成两大类。一些模型，例如 Baumol（1952）和 Tobin（1956），假定交易按一稳定的趋势发生，可精确预测；另一些模型例如 Olivera（1971）、Miller 和 Orr（1966），假定净现金流量是完全随机的。本节应用中，我们仿照 Frenkel 和 Jovanovic（1980），合并讨论这两类的各种特点。

假定货币持有量的变化遵循 $It\hat{o}$ 随机微分方程：

$$\begin{aligned} dM(t) &= -\mu dt + \sigma dz(t) \\ M(0) &= M_0 \quad (\mu \ge 0) \end{aligned} \quad (10.1)$$

其中 z 是具有单位方差的维纳过程，M_0 是最优初始货币持有量，μ 为净支出的确定部分。积分（10.1），我们可得：

$$M(t) = M_0 - \mu t + \sigma z(t) \quad (10.2)$$

这里 $M(t)$ 是期望为 $M_0 - \mu t$，方差为 $\sigma^2 t$ 的正态分布。货币持有量的最优水平是由金融管理成本的最小化确定。成本有两个来源。首先，是依赖于利率 r 和货币持有量 $M(t)$ 的被放弃的收入；其次，依赖于调整频率和每次调整的固定费用 C 的调整成本。假定货币存量的调整在货币持有量达到一个下界时是必需的，此一下界可以假定为 0。注意每一种成本都是随

机的，因为在每一时间点t由（10.2）所刻划的货币持有量是随机的。由此，现金平衡的最优量可以通过最小化期望成本而确定。

为分析的方便我们将期望成本分为两部分：第一部分为第一次调整时期发生前的期望成本，第二部分为此后的期望成本。持有量达到零和调整为必需的时期是随机的。对于第一部分的分析，我们把时期t的瞬时被放弃的收入记为$rM(t)$，它的现值记为$rM(t)e^{-rt}$。用$h(M,t\,|\,M_0,0)$表示货币持有量$M(t)$（在时期$t=0$时，它为最优水平M_0）在货币持有量为M的时期t之前尚未达到零的概率。这样，直到第一次调整前的期望被放弃的收入的现值可写作：

$$J_1(M_0)=r\int_0^{\infty}e^{-rt}[\int_0^{\infty}Mh(M,t\,|\,M_0,0)dM]dt \qquad (10.3)$$

Frenkel 和 Jovanovic（1980）关于（10.3）的证明可简化为：

$$J_1(M_0)=M_0-(1-\alpha)\frac{\mu}{r} \qquad (10.4)$$

这里：

$$\alpha=\exp\left\{-\frac{M_0}{\sigma^2}[(\mu^2+2r\sigma^2)^{1/2}-\mu]\right\} \qquad (10.5)$$

我们先来分析伴随第一次调整产生的期望成本。用$G(M_0)$表示整个期望成本的现值，$f(M_0,t)$表示货币持有量（它在$t=0$时刻为最优水平M_0）在t时刻达到零的概率。这样，首次调整后的期望成本的现值可由下式给出：

$$J_2(M_0)=\int_0^{2}e^{-rt}[C+G(M_0)]f(M_0,t)dt \qquad (10.6)$$

注意$G(M_0)$不包含当前的调整固定成本，这就是（10.6）中为什么会把C加到$G(M_0)$上的原因。Frenkel 和 Jovanovic（1980）提出（10.6）可以简记为：

$$J_2(M_0)=\alpha[C+G(M_0)] \qquad (10.7)$$

利用（10.4）和（10.7），我们可以把全部期望成本的现值写为：

$$G(M_0)=M_0-(1-\alpha)\frac{\mu}{r}+\alpha[C+G(M_0)]$$

整理得：

$$G(M_0)=\frac{M_0+\alpha C}{1-\alpha}-\frac{\mu}{r} \qquad (10.8)$$

对于金融管理期望成本$G(M_0)$关于最优货币平衡水平M_0的最小化，我们可给出必要条件：

$$(1-\alpha)+(M_0+C)\frac{\partial \alpha}{\partial M_0}=0 \tag{10.9}$$

将（10.9）在M_0处作 Taylor 展开，忽略第三和更高阶的项，解得M_0为：

$$M_0=\left(\frac{2C\sigma^2}{(\mu^2+2r\sigma^2)^{1/2}-\mu}\right)^{1/2} \tag{10.10}$$

等式（10.10）满足齐次假设，即同时给σ、C 和μ一个增加比例，M_0会有同一个比例的增加。

我们对两种特殊情况有兴趣。第一种情况，如果我们假定$\sigma^2=0$，那么把等式（10.10）中分母的括号内的项在$\sigma^2=0$处展开，得到：

$$(\mu^2+2r\sigma^2)^{1/2}=\mu+\frac{1}{2}\frac{2r\sigma^2}{\mu}+O(\sigma^4) \tag{10.11}$$

在（10.11）中的$O(\sigma^4)$定义为σ^4或高阶的项。将（10.11）代入（10.10）得

$$M_0=\left(\frac{2C\sigma^2}{(r\sigma^2/\mu)+O(\sigma^4)}\right)^{1/2} \tag{10.12}$$

最后，在（10.12）中，令$\sigma^2\to 0$，取极限我们得

$$\lim_{\sigma^2\to 0}M_0=\left(\frac{2C\mu}{r}\right)^{1/2}$$

这就是 Baumol-Tobin 的最优交易平衡公式。

第二种特殊情况，我们令$\mu=0$，计算（10.10）可得

$$M_0=\left(\frac{2C\sigma^2}{(2r\sigma^2)^{1/2}}\right)^{1/2} \tag{10.13}$$

这类似于 Miller-Orr 模型的结果。

这样，利用随机微积分方法，仿照 Frenkel-Jovanovic（1980）模型，对货币需求的几个现存模型的扩展已经完成。在这种扩展中，两种特殊情况的意义是清楚的。第一种情况，相对于 Baumol-Tobin 框架，它假定控制净支出的过程为确定的，即$\sigma^2=0$。第二种情况，相对于 Miller-Orr 框架，它假定控制净支出的过程为随机的，但没有趋势，即$\mu=0$。

11. 系统风险的价格

1976 年，Steve Ross 提出了资本资产定价理论，并证明了所有无系统风险组合获得无风险收益率加上资产收益的由 $K-$因子模型产生的假设，将导致在平均收益和 $K-$因子的每一个因子的价格 $\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_K$ 的存在性（Ross，1976）。这些价格满足这样的性质，每一资产 i 的期望收益 $E\tilde{Z}_i \equiv a_i$ 是资产 i 的收益关于每一因子 k 的标准差的线性函数，即

$$a_i = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k b_{ki} \text{ , } i = 1,2,...,N \tag{11.1}$$

这里资产收益的原始模型如下

$$\tilde{Z}_i = a_i + \sum_{k=1}^{K} b_{ki}\tilde{\delta}_k + \tilde{\varepsilon}_i \text{ , } i = 1,2,...,N \text{ 。} \tag{11.2}$$

此处 $\tilde{Z}_i$ 表示持有此资产一个单位时间所获随机非预期收益，$\tilde{\delta}_k$ 为由因子 k 所致系统风险，$\tilde{\varepsilon}_i$ 为资产 i 的非系统风险，a_i 和 b_{ki} 为常数，假定 $\tilde{\delta}_k$ 和 $\tilde{\varepsilon}_i$ 对任意 k 和 i 的期望为零，$\tilde{\varepsilon}_1,...,\tilde{\varepsilon}_N$ 独立，且对每一 k 和 i，$\tilde{\delta}_k$ 和 $\tilde{\varepsilon}_i$ 为具有有限方差的不相关随机变量。

Ross 证明了满足（11.1）的 $\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_K$ 的存在性。证明方法是作投资组合 $\eta \in R^N$，使得

$$\sum_{i=1}^{N} \eta_i = 0 \tag{11.3}$$

构造 η_i 使投资组合的收益

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} \eta_i \tilde{Z}_i &= \sum_{i=1}^{N} \eta_i [a_i + \sum_{k=1}^{K} b_{ki}\tilde{\delta}_k + \tilde{\varepsilon}_i] \\ &= \sum_{i=1}^{N} \eta_i a_i + \sum_{k=1}^{K} (\sum_{i=1}^{N} b_{ki}\eta_i)\tilde{\delta}_k + \sum_{i=1}^{N} \eta_i \tilde{\varepsilon}_i\end{aligned} \tag{11.4}$$

中的每一 $\tilde{\delta}_k$ 的系数为零，和要求对所有无系统风险零财富投资组合，有

$$\sum_{i=1}^{N} \eta_i a_i = 0 \tag{11.5}$$

成立。

这里，（11.3）对应于零财富的条件。条件

$$0=\sum_{i=1}^{N} b_{ki}\eta_i \qquad (k=1,2,\ldots,K) \text{ ,} \tag{11.6}$$

对应于无系统风险条件。实际上，Ross 并没有要求条件（11.3）对所有零财富无系统风险投资组合成立，而只是要求对它们当中那些充分分散（即 η_i 有相当的规模）的投资组合成立。这样他可以利用 $\tilde{\varepsilon}_1,\ldots,\tilde{\varepsilon}_N$ 的独立性证出随机变量 $\sum_{i=1}^{N}\eta_i\tilde{\varepsilon}_i$ 很小，因此，它在只对不能分散掉的风险才愿意付出一个正的价格的投资者的眼中具有很小的价格。

除了这个分析之外，Ross 证明条件：对任给 $\eta\in R^N$，

$$\sum_{i=1}^{N}\eta_i=0;\sum_{i=1}^{N}\eta_i b_{ki}=0\ k=1,2,\ldots,K \tag{11.7}$$

的条件意味着在均衡中关系式

$$\sum_{i=1}^{N}\eta_i a_i=0 \tag{11.8}$$

应成立。

（11.7）和（11.8）所说的是零财富，零系统风险的投资组合应获得零均值收益率。条件（11.7）和（11.8）具有明显的经济意义，若其不满足则显然存在套利机会。

无论那种情况，（11.7）和（11.8）意味着存在 $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_K$ 使（11.1）成立，其证明仅需简单的线性代数知识。注意 Ross 并没有做出均值方差型投资者效用函数或资产收益为正态分布的假定，这种假定在通常的 Sharpe-Lintner 资产定价理论中是通行的，在金融文献中也是标准做法。

不过，像金融学中标准的资产定价模型一样，Ross 的模型没有将资产收益和不确定性的基本来源相联系。在瞬时一般均衡的资产定价模型的构造中，第三章的应用 15 将被用作一个模式，其中形式（11.2）的关系在模型里确定，因此 $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_K$ 也将在模型里确定。这种资产价格确定的模型将保留 Ross-Sharpe-Lintner 公式中的好的和实际易用的性质，但同时又给我们一个新课题，即我们可以提出一般均衡问题。例如，收入税的累进制的提高会对风险资产供给的需求和 $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_K$ 产生什么影响？

让我们继续把第三章第 15 节的增长模型与（11.1）式联系起来。简单地，假定所有过程 i 都是动态的，即第三章（15.11）等式成立。为方便起见，重记（15.11）：

$$u'(c_t)=\beta E_i\left\{u'(c_{t+1})f_i'(x_{it},r_t)\right\} \tag{11.9}$$

现在，（11.2）是关于资产收益的一种特殊假设。相对于（11.2）的技术的不确定应是哪种假设呢？作为一个例子，对每一个 $i=1,2,\ldots,N$，记：

$$\begin{aligned} f_i(x_{it}, r_t) &\equiv (A_{it}^0 + A_{it}^1 \tilde{\delta}_{1t} + A_{it}^2 \tilde{\delta}_{2t} + \cdots + A_{it}^K \tilde{\delta}_{Kt}) f_i(x_{it}) \\ &\equiv r_{it} f_i(x_{it}) \end{aligned} \tag{11.10}$$

这里 A_{it}^k 为定值，$\{\tilde{\delta}_{kt}\}_{t=1}^{\infty}$ 对于每一个 k 是独立同分布的随机变量序列。对每一个 t，$\tilde{\delta}_{kt}$ 的期望为 0，方差有限。$\tilde{\delta}_{st}$ 和 $\tilde{\delta}_{kt}$ 对任意的 s,k 和 t 都独立。进一步假定 $f(\cdot)$ 为凹、单调递增、二次可微的函数，$f'(0)=\infty$，$f'(\infty)=0$ 且存在一个下界 ε_0 使得对所有 t，$r_t > \varepsilon_0$ 以概率 1 成立。这些假定比需要的强些，但可以使我们避免因技术问题而离题。对任给的 t，定义 $\tilde{\delta}_{0t} \equiv 1$，因此我们可以在下面的（11.11）中从 $k=0$ 到 K 求和。

将（11.10）代入（11.9）得，对所有 t,k 和 i：

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \beta E_t \left\{ u'(c_{t+1}) \left(\sum_{k=0}^{K} A_{it}^k \tilde{\delta}_{kt} \right) f_i'(x_{it}) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{K} \left\{ [A_{it}^k f_i'(x_{it})] E_t \left\{ \beta u'(c_{t+1}) \tilde{\delta}_{kt} \right\} \right\} \end{aligned} \tag{11.11}$$

暂不考虑（11.11），我们来考察储存一单位的资本并将其在 t 期开始时投入到过程 i 中的边际效益。在 t 期末，r_t 可知且额外产出为：

$$\tilde{Z}_{it} \equiv A_{it}^0 f'(x_{it}) + \sum_{k=1}^{K} A_{it}^K f_i'(x_{it}) \tilde{\delta}_{kt} \tag{11.12}$$

令：

$$a_i \equiv A_{it}^0 f'(x_{it});\ \ b_{kt} \equiv A_{it}^k f'(x_{it}),\ \ \tilde{\delta}_{kt} = \tilde{\delta}_k \tag{11.13}$$

方程（11.12）等同于 Ross 的 $\tilde{\varepsilon}_i \equiv 0$ 时的（11.2）。我们现在再来生成类似于（11.1）的式子。对于（11.11），利用（11.13）改写之，得：

$$u'(c_t) = \sum_{k=1}^{K} b_{ki} E_t \left\{ \beta u'(c_{t+1}) \tilde{\delta}_{kt} \right\} + a_i E_t \left\{ \beta u'(c_{t+1}) \right\} \tag{11.14}$$

因此：

$$a_i = \frac{u'(c_t)}{\beta E_t \{u'(c_{t+1})\}} - \sum_{k=1}^{K} b_{ki} \left(\frac{E_t \{u'(c_{t+1}) \tilde{\delta}_{kt}\}}{E_t \{u'(c_{t+1})\}} \right. \tag{11.15}$$

这样由下式定义的 $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_K$：

$$\lambda_0 = \frac{u'(c_t)}{\beta E_t \{u'(c_{t+1})\}};\ \lambda_k = -\frac{E_t \{u'(c_{t+1}) \tilde{\delta}_{kt}\}}{E_t \{u'(c_{t+1})\}} \tag{11.16}$$

满足：

$$a_i = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{K} b_{ki}\lambda_k \tag{11.17}$$

这里为了记号方便下标t被省去。这些结果非常有启发性，它显示该研究模型有极丰富的经济内容。尽管该模型是规范的，但下一节我们将转而讨论均衡资产定价模型，使得λ_k就变为均衡风险价格。让我们更详细揭示（11.16）式的经济意义。

设$K=1$和存在一个无风险资产N，即：

$$b_{N1} \equiv A'_{Nt} f'(x_{Nt}) = 0 \tag{11.18}$$

于是：

$$A'_{Nt} = 0 \tag{11.19}$$

由（11.19），我们得：

$$a_N = \lambda_0;\ a_i = a_N + b_{1i}\lambda_1 \tag{11.20}$$

所以，对任意$i, j \neq N$：

$$(a_i - a_N)/b_{1j} = (a_j - a_N)/b_{1j} \tag{11.21}$$

（11.20）式的第二部分相应于证券市场线，也就是说在单因子模型中期望收益和风险呈线性关系。方程（11.21）相对于普通的 Sharpe-Lintner-Mossin 资本资产定价模型结果为：在均衡中，每单位风险的超额收益对所有资产一定相等。

（11.16）式所给λ_0的经济解释众所周知，此处就不必再加说明。观察λ_k的公式，在$t+1$时刻的消费边际效用与一个具有零期望和有限方差的扰动$\tilde{\delta}_{kt}$的协方差出现在分子中。由于$\tilde{\delta}_{kt}$的增加会导致产出的增加，$c_{t+1} = g(y_{t+1})$随y_{t+1}的增加不会减少，因此这个协方差应是负的，所以λ_k的符号为正。随后，我们将更详细地研究确定$\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_K$的大小。现在，让我们说明这一模型如何在实际问题中利用时间序列数据得到$\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_K$的估计也许是有帮助的。

首先，由于$\tilde{Z}_i$的主观性，如何接近 Ross 模型（11.2）呢？像美国证券市场那样组织很好的市场最自然的接近这一模型的方法是理性预期：$\tilde{Z}_i$的主观分布等于它的实际或客观分布。我们将在理性预期条件下，资产定价模型在下面得到发展，证明我们的资产定价模型与规范模型一样生成相同的解。收敛定理意味着出$\{x_t, c_t, x_{1t}, x_{2t}, ..., x_{Nt}\}_{t=1}^{\infty}$收敛于一个平稳随

机过程。

因此，平均遍历性定理（不严格地说，一个平稳随机过程的任意函数G的时间平均等于G关于这一过程的平稳分布的统计平均）允许我们应用对平稳随机过程发展的时间序列方法来估计$\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_K$。众所周知，时间序列数据对$\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_K$的估计是有用的。

下面，我们转而讨论资产定价模型的进一步发展。

12. 资产定价模型

本节我们将重新解释第三章第 15 节的模型，给它添加一个纯粹出让权益的市场，以便描述均衡资产定价的进展。这样，我们不仅产生了讨论资本资产价格鞅性质的一般均衡内容，而且这一模型将包含重要的投资决策，重要的纯粹出让权益的市场即股票市场和定价真实资本存量的市场。

我们相信弄清楚如何将最优增长模型变成资产定价模型是相当有益的。这也是有大量关于随机增长模型的文献稍加努力就可照搬到资产定价问题中的原因。

我们像 Lucas（1978）那样，发展资产定价模型。这一模型包含一个有代表性的消费者，他的偏好相同于在第三章（15.1）给出的计划者的偏好。此模型包含N个不同的厂商，他们从消费者处在每一时期以利率R_{t+1}借入资本，以使下式最大化：

$$\pi_{i,t+1} \equiv f_i(x_{it}, r_t) - R_{i,t+1}x_{it} 。\tag{12.1}$$

注意，这里假定每一个厂商i在r_t已知后做出借入x_{it}的决策，此处$R_{i,t+1}$表示为借入利率，它是在时刻$t+1$行业通行的资本借入利率，在模型中它是给定的。

模型将按如下方式引入股票市场，即其实际量化方面与均衡增长模型是一样的。其次，假定我们的模型满足理性预期假设。该定量模型本质上是 Arrow-Debreu 模型，也是 Lucas（1978）模型。我们以每一种状态存在一种证券的方式引进证券市场。然而，确实有如（12.1）的借入权益竞争交易的分离市场。回忆 Arrow-Debreu 经济租金就是以一次付清的模式来进行再分配的。

这一模型是基于 Lucas（1978）模型的想法，在那里每一厂商i公开发行一完全可分割的股份。在时期t拥有厂商i的$a\%$的股份，则在时期$t+1$将享有其$a\%$的利润的权力。在理性预期的假设下，均衡资产价格和均衡消费，资本和产出，完全类似于 Lucas（1978），由最优化确定。我们来描述这个模型。代表性的消费者求解问题：

$$\max E_1 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t) \tag{12.2}$$

满足：

$$c_t + x_t + P_t \cdot Z_t \le \pi_t \cdot Z_{t-1} + P_t \cdot Z_{t-1} + \sum_{i=1}^{N} R_{it} x_{i,t-1} \equiv y_t \tag{12.3}$$

$$c_t \geq 0; x_t \geq 0; Z_t \geq 0; x_{it} \geq 0; i = 1,2,\ldots,N\ ,\ \forall t \qquad (12.4)$$

$$c_1 + x_1 + P_1 \cdot Z_0 = \pi_1 \cdot Z_0 + P_1 \cdot Z_0 + \sum_{i=1}^{N} R_{i1} x_{i0} \equiv y_1 \qquad (12.5)$$

$$Z_0 \equiv 1; R_{i1} \equiv f_i'(x_{i0}, r_0); \Pi_{i1} \equiv f_i(x_{i0}, r_0) - f_i'(x_{i0}, r_0) x_{i0}$$
$$x_0, \{x_{i0}\}_{i=1}^{N} \text{ 给定}$$

注意$c_t, x_t, P_{it}, Z_{it}, \pi_{it}, R_{it}$均为$F_t$可测，分别表示$t$时期的消费，$t$时期消费者拥有的全部资本存量，厂商$i$在$t$时期每股股票的价格，厂商$i$在$t$时期被个人所拥有的股份数量，厂商$i$在$t$时期的收益和租借因子，即$R_{it}$为本金加上出租给厂商$i$每一单位资本所得利息。这里的点表示数量积。

假定厂商i租借x_{it}以使（12.1）达到最大化。在r_t已知以前，假定消费者在t时期出租给厂商i的资本为x_{it}，因而$R_{i,t+1}$在t时期是不确定的。消费者为了求解他在时期 1 的问题，一定会形成关于$\{P_{it}\}_{t=1}^{\infty}$，$\{R_{it}\}_{t=1}^{\infty}$，$\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$的期望值，并在（12.3）和（12.4）的约束下最大化（12.2）。经济活动中消费者一方按照这种方式决定对商品和股票的名义需求，以及资本存量的名义供给和对N个厂商中的每一个厂商的服务。对厂商一方也是类似的。我们用下述定义来完成模型：随机过程集

$$\Re \equiv (\{\overline{P}_{it}\}_{t=1}^{\infty}, \{\overline{R}_{it}\}_{t=1}^{\infty}, \{\overline{\pi}_{it}\}_{t=1}^{\infty}, \{\overline{x}_{it}\}_{t=1}^{\infty}, \{\overline{Z}_{it}\}_{t=1}^{\infty}, i = 1,2,\ldots,N, \{\overline{c}_{it}\}_{t=1}^{\infty}, \{\overline{x}_t\}_{t=1}^{\infty})$$

是一个理性预期均衡$(R.E.E.)$，如果面对$\mathrm{P} \equiv (\{\overline{P}_{it}\}_{t=1}^{\infty}, \{\overline{R}_{it}\}_{t=1}^{\infty}, \{\overline{\pi}_{it}\}_{t=1}^{\infty})$消费者选择：

$$x_t = \overline{x}_t, x_{it} = \overline{x}_{it}, c_t = \overline{c}_t, Z_{it} = \overline{Z}_{it} \qquad a.e \qquad (12.6)$$

第i家厂商选择：

$$x_{it} = \overline{x}_{it} \qquad (12.7)$$

更进一步：

（资产市场出清）$Z_{it} \leq 1$，假若$\overline{Z}_{it} < 1$，则$\overline{P}_{it} = 0$　　$a.e$　　（12.8）

（商品市场出清）$\overline{c}_t + \overline{x}_t = \sum_{i=1}^{N} f_i(\overline{x}_{i,t-1}, r_{t-1})$　　$a.e$　　（12.9）

（资本市场出清）$\sum_{i=1}^{N} \overline{x}_{it} = \overline{x}_t$　　$a.e$　　（12.10）

这里$a.e.$表示几乎处处，这样就结束，我们在这一节中将会用到的$R.E.E.$的定义。

很容易给出$R.E.E.$的一阶必要条件。让我们首先从消费者一方开始。为记号方便，我们

去掉上面的横线。在 t 期若消费者购买了一股厂商 i 的股票，那么他花费 P_{it} 单位商品。在被放弃的效用上的 t 期的边际成本为 $u'(c_t)P_{it}$。在 t 期末，r_t 已知且 $P_{i,t+1}$ 和 $\pi_{i,t+1}$ 均变成已知。因此，在 $t+1$ 期开始时消费者获得

$$u'(c_{t+1})(P_{i,t+1}+\pi_{i,t+1}) \tag{12.11}$$

超额效用，假如他保留 $\pi_{i,t+1}$ 并以 $P_{i,t+1}$ 售出除息股份。但这些效用是不确定的，并在未来的一期中收到。在 $t+1$ 期所获效用期望现值是：

$$\beta E_t\left\{u'(c_{t+1})(P_{i,t+1}+\pi_{i,t+1})\right\} \tag{12.12}$$

在市场中消费者对资产 i 均衡要求 t 期的边际机会成本大于或等于在 $t+1$ 期的红利的边际利益和除息卖出价的现值：

$$P_{it}u'(c_t) \geq \beta E_t\left\{u'(c_{t+1})(\pi_{i,t+1}+P_{i,t+1})\right\} \qquad a.e \tag{12.13}$$

$$P_{it}u'(c_t)Z_{it} \geq \beta E_t\left\{u'(c_{t+1})(\pi_{i,t+1}+P_{i,t+1})\right\}Z_{it} \qquad a.e. \tag{12.14}$$

在出租市场中，类似理由可得：

$$u'(c_t) \geq \beta E_t\left\{u'(c_{t+1})(R_{i,t+1})\right\} \qquad a.e \tag{12.15}$$

$$u'(c_t)x_{it} = \beta E_t\left\{u'(c_{t+1})(R_{i,t+1})\right\}x_{it} \qquad a.e \tag{12.16}$$

若一阶必要条件（12.13）—（12.16）能描述消费者的最优当然最好。但众所周知，为了完全刻画最优性，在无穷远处的截断条件也是需要的。Benveniste 和 Scheinkman（1977）最近的工作让我们可以证明下述引理。

引理 12.1 假定第三章第 15 节的 $A.1$ 成立，且过程集 P 满足 $W(y_t,t)\to 0$，当 $t\to 0$ 时，其中 $W(y_t,t)$ 定义为：

$$W(y_t,t)=\max E_1\sum_{s=t}^{\infty}\beta^{s-1}u(c_s)$$

满足条件（12.3）—（12.5），把当中的 t 换成 s，1 换成 t。仍用 y_t 表示（12.3）式的右边。则对给定的 $\{P_{it}\}_{t=1}^{\infty}$，$\{\pi_{it}\}_{t=1}^{\infty}$，$\{R_{it}\}_{t=1}^{\infty}$，$i=1,2,\ldots,N$，最优解 $\{Z_{it}\}_{t=1}^{\infty}$，$\{x_{it}\}_{t=1}^{\infty}$，$i=1,2,\ldots,N$，$\{c_t\}_{t=1}^{\infty}$，$\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$，可由（12.13）、（12.14）和下列两式

$$TVC_{\infty}(\text{股票市场}) \quad \lim_{t\to\infty}E_1\left\{\beta^{t-1}u'(c_t)P_t\cdot Z_t\right\}=0 \tag{12.17}$$

$$TVC_{\infty}(\text{股票市场}) \quad \lim_{t\to\infty}E_1\left\{\beta^{t-1}u'(c_t)P_t\cdot Z_t\right\}=0 \tag{12.18}$$

来刻画。

证明：设$\{\overline{Z}_t\},\{\overline{c}_t\}$和$\{\overline{x}_t\}$满足（12.13）—（12.17）并令$\{Z_t\},\{c_t\}$和$\{x_t\}$为满足同样初始条件（12.13）—（12.15）的一族随机过程。对每一T计算亏空的上界：

$$E_1\left\{\sum_{t=1}^{T}\beta^{t-1}u(c_t)-\sum_{t=1}^{T}\beta^{t-1}u(\overline{c}_t)\right\} \tag{12.19}$$

$$\leq E_1\left\{\sum_{t=1}^{T}\beta^{t-1}u(\overline{c}_t)(c_t-\overline{c}_t)\right\} \tag{12.20}$$

$$\begin{aligned}&= E_1\{\sum_{t=1}^{T}\beta^{t-1}u(\overline{c}_t)[\pi_t\cdot Z_{t-1}+P_t\cdot Z_{t-1}+\sum_{t=1}^{T}R_{it}x_{i,t-1}\\&\qquad -P_t\cdot Z_t-x_t-\pi_t\cdot\overline{Z}_{t-1}-P_t\overline{Z}_{t-1}-\sum_{i=1}^{N}R_{it}\overline{x}_{i,t-1}\\&\qquad +P_t\cdot\overline{Z}_t+\overline{x}_t]\}\end{aligned} \tag{12.21}$$

$$= E_1\{\beta^{T-1}u'(\overline{c}_T)[P_T\cdot(\overline{Z}_T-Z_T)+\overline{x}_T]\} \tag{12.22}$$

$$\leq E_1\{\beta^{T-1}u'(\overline{c}_T)[P_T\cdot\overline{Z}_T+\overline{x}_T]\}\to 0\ \ (T\to\infty) \tag{12.23}$$

这里应用了方程（12.13）—（12.16）以消去（12.21）式右边级数的中间项。

相对于 1 期的项互相抵消，因为初始条件均相同。因此在（12.20）和（12.21）右边的所有项中仅有（12.22）中右边的项得以保留。由（12.17）、（12.18）和Z_T与x_T的非负性可知，（12.22）右边的渐近上界为零。这表示（12.13）—（12.18）意味着最优性。注意，证明到这一步还不需要关于$W(y_t,t)$的假设。

现在令$\{\overline{Z}_t\}$、$\{\overline{c}_t\}$和$\{\overline{x}_t\}$为给定$\{P_t,R_t,\pi_t\}$下的最优。由于$u'(0)=\infty$可导出$\overline{c}_t>0\ \ a.e.$和W在$\overline{y}_t$可微，我们可由W的凹性及$u\geq 0$得知：

$$W(y_t,t)\geq W(y_t,t)-W(y_t/2,t)\geq W'(y_t,t)y_t/2=\beta^{t-1}u'(c_t)y_t/2 \tag{12.24}$$

因而$E_tW(y_t,t)\to 0,\ \ t\to 0$

推出：

$$E_t\beta^{t-1}u'(c_t)y_t\to 0,\ \ t\to\infty \tag{12.25}$$

但是，

$$y_t\equiv\pi_t\cdot Z_{t-1}+P_t\cdot Z_{t-1}+\sum_i R_{it}x_{i,t-1} \tag{12.26}$$

于是由一阶必要条件：

$$E_1\beta^{t-1}u'(c_t)[(\pi_t+P_t)\cdot Z_{t-1}+\sum_i R_{it}x_{i,t-1}]$$
$$=E_1\beta^{t-2}u'(c_{t-1})P_{t-1}\cdot Z_{t-1}+E_t\beta^{t-2}u'(c_{t-1})x_{t-1} \tag{12.27}$$

由（12.13）—（12.16）可得：

$$x_{i,t-1}u'(c_{t-1})=\beta E_{t-1}[u'(c_t)R_{it}]x_{i,t-1} \tag{12.28}$$

$$\beta^{-1}x_{i,t-1}u'(c_{t-1})=E_{t-1}[u'(c_t)(\sum_i R_{it}x_{i,t-1})] \tag{12.29}$$

$$P_{i,t-1}u'(c_{t-1})Z_{i,t-1}=\beta E_{t-1}[u'(c_t)(\pi_{it}+P_{it}Z_{i,t-1}] \tag{12.30}$$

$$\beta^{-1}P_{t-1}u'(c_{t-1})Z_{t-1}=E_{t-1}[u'(c_t)(\pi_t Z_{t-1}+P_t Z_{t-1})] \tag{12.31}$$

因为 $P_{t-1}\ge 0, Z_{t-1}\ge 0$，所以（12.25）意味着：

$$E_1\beta^{-2}u'(c_{t-1})P_{t-1}\cdot Z_{t-1}\to 0 \quad (t\to\infty) \tag{12.32}$$

$$E_1\beta^{-2}u'(c_{t-1})x_{t-1}\to 0 \qquad (t\to\infty) \tag{12.33}$$

至此引理得证。

此证明的第一部分是 Malinvaud（1953）所给，第二部分来自 Benveniste 和 Scheinkman（1977）。引理 12.1 的重要性在于它刻划了消费者的最优条件。

当 $t\to\infty$ 时，$E_1W(y_t,t)\to 0$ 的假设限制在过程集 P 内成立，它要求 P 满足沿 P 中任一路径效用增长平均地看不能快过 β^t。在 P 上 $E_1W(y_t,t)\to 0$ 的一般充分条件可由 Brook 和 Gale（1969）及 McFadden（1973）的方法直接扩展到我们的模型。

一个明显的充分条件是效用函数有界，即存在常数 $\underline{B}<\overline{B}$ 满足对任一 $c\ge 0$，有 $\underline{B}\le u(c)\le\overline{B}$。

我们注意到这里使用的把股票市场引入此类存在投资决策的模型的方法首先是由 Scheinkman（1977）在确定性情况下发展起来的。

下面，我们引进一个基本引理。

引理 12.2

（i）设 $X=(\{\overline{c}_t\}_{t=1}^{\infty},\{\overline{x}_{it}\}_{t=1}^{\infty},\{\overline{x}_t\}_{t=1}^{\infty})$ 为第三章的最优增长问题（15.1）的解，并定义：

$$\overline{R}_{it+1}\equiv f_i'(\overline{x}_{it},r_t),\overline{\pi}_{t,t+1}\equiv f_i(\overline{x}_{it},r_t)-f_i'(\overline{x}_{it},r_t)\overline{x}_{it} \tag{12.34}$$

然后，设 $\{\overline{P}_{it}\}_{t=1}^{\infty}, i=1,2,...,N$，满足（12.30）和（12.32）。令：

$$\overline{Z}_{it}=1 \tag{12.35}$$

则$(\{\overline{P}_{it}\}_{t=1}^{\infty},\{\overline{R}_{it}\}_{t=1}^{\infty},\{\overline{\pi}_{it}\}_{t=1}^{\infty},\{\overline{x}_{it}\}_{t=1}^{\infty},\{\overline{Z}_{it}\}_{t=1}^{\infty},i=1,2,\ldots,N,\{\overline{c}_{t}\}_{t=1}^{\infty},\{\overline{x}_{t}\}_{t=1}^{\infty})\equiv\Re$为理性预期均衡$(R.E.E.)$。

（ii）设$\Re$为$R.E.E$。则X为第三章的最优增长问题（15.1）的解。

证明：设X为最优增长问题（15.1）的解。显然由其定义可知$\Re$满足$R.E.E$一阶必要条件。两个TVC_{∞}条件（1217）和（12.18）有待讨论。令：

$$V(x_{t-1},t-1)\equiv\max E_1\sum\beta^{s-1}u(c_s) \qquad (12.36)$$

满足：

$$c_s+x_s=\sum_{j=1}^{N}f_j(x_{j,s-1},r_{s-1}) \qquad (12.37)$$

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{N}x_{js}\equiv x_s;x_{js}\geq 0,\ j=1,2,\ldots,N,c_s\geq 0,x_s\geq 0\\&s=t,t+1,\ldots,\quad x_{t-1}\text{给定}\end{aligned} \qquad (12.38)$$

按照类似于(12.24)—(12.33)中的讨论，又因为u有界，我们得到对$\forall x_t\geq 0$，有$V(x_t,t)\to 0$当$t\to\infty$时，且：

$$\begin{aligned}V(x_t,t)&\geq V(x_t,t)-V(x_t/2,t)\geq V'(x_t,t)x_t/2\\&=E_1[\beta^t u'(c_{t+1})f_i'(x_{it},r_t)x_t/2]\\&=E_1[\beta^{t-1}u'(c_t)x_t/2]\geq 0\end{aligned} \qquad (12.39)$$

由于（12.39）的左边必须趋于0，那么其右边也必定趋于0。因此：

$$E_1[\beta^{t-1}u'(c_t)x_t]\to 0 \qquad (t\to\infty) \qquad (12.40)$$

沿任一最优路径。（12.18）得证。

对于（12.17），假定随机过程$\{\overline{P}_{it}\}_{t=1}^{\infty}$是利用（12.30）从模型数量方面（quantity side）构造的，使得TVC_{∞}（12.32）成立。因此，根据$\{\overline{P}_{it}\}_{t=1}^{\infty}$的构造$TVC_{\infty}$，（12.17）也成立。这就证明了（i）可推出（ii）。

为证明（ii）可推出（i），显然$R.E.E.$数量方面上的一阶必要条件可归结到最优增长问题的一阶条件。需要证明的是TVC_{∞}（12.40）。但这由引理12.1的（12.18）式可得。此即证明了引理12.2。

引理12.2揭示了任一竞争均衡的数量方面可由增长问题的解产生。这一事实使我们可以确定Ross价格。更进一步，它将用来证明资产定价函数的存在性，这将在下一节中进一步讨论。我们现在重新来讨论第三章第15节中的增长模型和Ross风险价格之间的关系，这会给

$R.E.E.$ 随机过程 $(\{\overline{R}_{it}\}_{t=1}^{\infty},\{\overline{P}_{it}\}_{t=1}^{\infty},\{\overline{\pi}_{it}\}_{t=1}^{\infty})$ 的经济解释带来便利。

为了记号方便，我们去掉均衡数量上面的横线。假定在均衡中条件使得所有资产价格依概率 1 为正，则 $\overline{Z}_{it}=1\ \ w.p.1$，且由（12.30）我们对每一 t 有：

$$u'(c_t)=\beta E_t[u'(c_{t+1})Z_{it}];\ Z_{it}\equiv(P_{i,t+1},\pi_{i,t+1})/P_{it} \tag{12.41}$$

接下来，利润最大化蕴含：

$$f_i'(x_{it},r_t)=R_{i,t+1},\pi_{i,t+1}=f_i(x_{it},r_t)-f_t'(x_{it},r_t)x_{it} \tag{12.42}$$

而对于出租市场，假定所有过程依概率 1 地被利用，则（12.42）和（12.28）告诉我们，对任一 i 和 t 有：

$$u'(c_t)=\beta E_t[u'(c_{t+1})f_i'(x_{it},r_t)] \tag{12.43}$$

注意我们无法以 Ross 的线性形式（11.1）写出由（12.41）所定义的收益 Z_{it}，除非 $P_i(y_{t+1})$ 关于 y_{t+1} 线性。第 16 节里有一个例子，在那里 $P_i(y_{t+1})$ 关于 y_{t+1} 为线性。但是我们首先必须证明资产定价函数的存在性。下一节将完成这项工作。

13. 资产定价函数的存在性

因为在均衡中第 12 节的资产定价模型的数量方面与第三章第 15 节的 N 个过程的增长模型是一样的，由此我们可以利用第 15 节的结论来证明资产定价函数 $P(y)$ 的存在性，其方法类似于 Lucas（1978）中的方法。

假设 1. 假定对所有的 $r\in R$ 有：

（a） $f_i'(0,r)=+\infty, i=1,2,\ldots,N$

（b） $\pi_i(x,r)\equiv f_i(x,r)-f_i'(x,r)x>0\qquad(\forall x>0)$

假设 1（a）指出在均衡中（12.15）式的等式成立。同样，假设 1（b）指出在均衡中（12.13）式的等式成立。如同 Lucas（1978）方法，寻找一个有界连续函数 $P_i(y)$ 使得在均衡中下式成立：

$$P_{it}u'(c_t)=P_i(y_t)u'(c_{t+1})=\beta E_t[u'(c_{t+1})(\pi_{i,t+1}+P_i(y_{t+1}))] \tag{13.1}$$

将前述问题转换为一个不动点问题。首先，从第三章第 15 节注意到：

$$u'(c_t)=U'(y_t), t=1,2,\ldots \tag{13.2}$$

$$\begin{aligned}\pi_{i,t+1} f_i(x_{it}, r_t) - f_i'(x_{it}, r_t) x_{it} &\equiv \pi_i(x_{it}, r_t) = \pi_i(\eta_i(x_t) x_t, r_t) \\ &= \pi_i[\eta_i(h(y_t)) h(y_t) r_t] \\ &\equiv J_i(y_t, r_t)\end{aligned} \tag{13.3}$$

$$\begin{aligned}y_{t+1} &= \sum_{j=1}^{N} f_j(\eta_j(x_t) x_t, r_t) \\ &= \sum_{j=1}^{N} f_j[\eta_j(h(y_t)) h(y_t), r_t] \equiv Y(y_t, r_t)\end{aligned} \tag{13.4}$$

令：

$$\begin{aligned}G_i(y_t) &\equiv \beta \int_R U'[Y(y_t, r)] J_i(y_t, r) \mu(dr) \\ F_i(y_t) &\equiv P_i(y_t) U'(y_t)\end{aligned} \tag{13.5}$$

$$(T_i F_i)(y_t) \equiv G_i(y_t) + \beta \int_R F_i[Y(y_t, r)] \mu dr \tag{13.6}$$

则对任一i，（13.1）可写作：

$$F_i(y_t) = (T_i F_i)(y_t) \tag{13.7}$$

问题（13.7）为一不动点问题，我们要找一个函数F_i满足在算子T_i作用下其保持不变。为了能够应用压缩映射理论来找出不动点F_i，我们首先必须证明T_i将$[0,\infty)$上的有界连续函数，记为$C[0,\infty)$，映射回自身。第 15 节的结果表明（13.2）—（13.6）中的函数关于y_t均连续。我们需要下述引理。

引理 13.1 若$U(y)$在$[0,\infty)$有界，则$G_i(y)$有界。

证明：首先，由U的凹性我们可知：

$$U(y) - U(0) \geq U'(y)(y-0) = U'(y) y \tag{13.8}$$

因此，存在B满足：

$$U'(y) y \leq B \qquad (\forall y \in [0,\infty)) \tag{13.9}$$

其次：

$$\begin{aligned}\int_R U'[Y(y,r)] J_i(y,r) \mu(dr) &= \int_R \{U'[Y(y,r)] Y(y,r) J_i(y,r) / Y(y,r)\} \mu(dr) \\ &\leq B \int [J_i(y,r) / Y(y,r)] \mu(dr) \leq B\end{aligned}$$

由于 $f_i' \geq 0$蕴含：

$$f_i - f_i' x_{it} \equiv J_i \le f_i; Y \equiv \sum_{j=1}^{N} f_j; J_i / Y \le 1$$

从而， G_i 以 βB 为界。引理得证。

下面我们证明，若：

$$\|F_i\| \equiv \sup_{y\in[0,\infty)} |F_i(y)| \tag{13.10}$$

作为 $C[0,\infty)$ 上的范数，则 T_i 是模为 β 的压缩算子。

引理 13.2 $T_i : C[0,\infty) \to C[0,\infty)$ 是模为 β 的压缩算子。

证明：我们需证对任一两个元素 $F, G \in C[0,\infty)$ 有：

$$\|T_i F - T_i G\| \le \beta \|F - G\| \tag{13.11}$$

然而，对 $y \in [0,\infty)$，我们有：

$$\begin{aligned}\|T_i F(y) - T_i G(y)\| &= \beta \left| \int (F[Y(y,r)] - G[Y(y,r)]) \mu(dr) \right| \\ &\le \beta \int |F(y') - G(y')| \mu(dr) \\ &\le \beta \int \sup_{y'\in[0,\infty)} |F(y') - G(y')| \mu(dr) \\ &= \beta \|F - G\|\end{aligned} \tag{13.12}$$

取（13.12）式左边的最大值，有：

$$\|T_i F - T_i G\| \le \beta \|F - G\| \tag{13.13}$$

引理得证。

定理 13.1. 对每一个 i，存在一个形如 $P_i(y)$ 的资产定价函数，其中 $P_i(y) \in C[0,\infty)$。

证明：应用压缩映射定理可找出一不动点 $F_i(y) \in C[0,\infty)$。

令：

$$P_i(t) = \overline{F}_i(y) / U'(y) \tag{13.14}$$

显然 $P_i(y)$ 满足（13.1）。进一步，由 T_i 和满足（13.1）的 $P_i(y)$ 的定义可得 $P_i(\cdot) U'(\cdot) \equiv \overline{F}_i(\cdot)$ 为 T_i 的不动点。定理得证。

14. 确定等价公式

在本节中，我们的目的是利用第 12 节的资产定价模型构造一种价格等于红利现值 $(P = PVD)$ 的一般股票定价公式。在均衡中，这个公式一定成立。

公式将由第 12 节模型中的下述特殊情况导出：

$$f_i(x_{it}, r_t) \equiv \bar{f}_i(x_{it})(A_i^0 + A_i^1\tilde{\delta}_t),\ \ A_i^0 > 0 \tag{14.1}$$

注意，方程（14.1）中的 $\{\delta_t\}_{t=1}^{\infty}$ 为一独立同分布的随机变量序列，具有零均值和有限方差 σ^2。数 A_i^0 和 A_i^1 及随机变量 $\tilde{\delta}_t$ 假定满足：存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得对每一个 t 有

$$P[A_i^0 + A_i^1\tilde{\delta}_t \geq \varepsilon_0] = 1 \tag{14.2}$$

最优利润如下给出：

$$\begin{aligned}\pi_i(\pi_{it}, r_t) &= \bar{f}_i(x_{it})(A_i^0 + A_i^1\tilde{\delta}_t) - \bar{f}_i'(x_{it})x_{it}(A_i^0 + A_i^1\tilde{\delta}_t)\\ &= \bar{\pi}_i(x_{it})(A_i^0 + A_i^1\tilde{\delta}_t)\end{aligned} \tag{14.3}$$

为简化计算中的记号，令：

$$f_i(x_{it}, r_t) = \mu_{it} + \sigma_{it}\tilde{\delta}_t \tag{14.4}$$

$$f_i'(x_{it}, r_t) = \mu_{it}' + \sigma_{it}'\tilde{\delta}_t \tag{14.5}$$

$$\pi_i(x_{it}, r_t) = \overline{D}_{it} + V_{it}\tilde{\delta}_t \tag{14.6}$$

其中：

$$\begin{aligned}&\mu_{it} \equiv \bar{f}_i(x_{it})A_i^0; \sigma_{it} \equiv \bar{f}_i(x_{it})A_i^1; \mu_{it}' \equiv \bar{f}_i'(x_{it})A_i^0; \sigma_{it}' \equiv \bar{f}_i'(x_{it})A_i^1;\\ &\overline{D}_{it} \equiv \bar{\pi}_i(x_{it})A_i^0; V_{it} \equiv \bar{\pi}_i(x_{it})A_i^1\end{aligned} \tag{14.7}$$

除非特别声明，所有量均处于均衡，记号的意义如下：$\overline{D}_{it}$ 表示 t 期的平均红利或期望利润，V_{it} 表示利润对于过程 $\{\tilde{\delta}_t\}_{t=1}^{\infty}$ 的变化性系数，等等。一个特别的比喻是将 $\{\tilde{\delta}_t\}_{t=1}^{\infty}$ 想象成市场，所有的行业 $i = 1,2,\ldots,N$ 的生产和收益都受市场的影响。$\tilde{\delta}_t$ 的高值对应于市场繁荣，而低值对应于市场低迷。具有 $A_i^1 > 0$ 的行业 i 为正周期性行业，那么 $A_i^1 < 0$ 则为反周期行业，而 $A_i^1 = 0$ 则为非周期行业。

假设 1. 至少存在一个行业记为 N 为非周期的，称为是无风险的。为了强调，我们有时称 N 为无系统风险的行业。

为了使所有行业在均衡中都活跃且产出有界，我们假定如下：

假设 2. （i） $\bar{f}_i'(0)=\infty, i=1,2,...,N$ （ii） $\bar{f}_i'(\infty)=0, i=1,2,...,N$ 。

假设 2（i）保证沿均衡所有的 $x_{it}>0$ ；假设 2（ii）意味着存在上界 B 使得 $x_{it}\le B\ w.p.1$，对所有的 i 和 t 。

尽管 $f(x)$ 的凹性和 $f(0)=0$ 蕴含最优利润非负，我们还进一步要求对每一 $x>0$ 利润为正，即：

假设 3. $\forall x>0, \pi_i(x)\equiv \bar{f}_i(x)-\bar{f}_i'(x)x>0$ 。

假设 3 将用来证明均衡中股票价格为正。

由均衡的一阶必要条件（12.13）—（12.16）、（14.2）、假设 2（i）和假设 3，立即可知：

$$P_{it}u'(c_t)=\beta E_t[u'(c_{t+1})(\pi_{i,t+1}+P_{i,t+1})] \qquad a.e \tag{14.8}$$

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \beta E_t[u'(c_{t+1})R_{i,t+1}] \\ &= \beta E_t u'(c_{t+1})u'_{it}+\beta E_t[u'(c_{t+1})\tilde{\delta}_t]\sigma'_{it} \qquad a.e \end{aligned} \tag{14.9}$$

（14.9）的右边可从（14.5）得到。由假设 3 显然可知股票价格为正数，因为 $\pi_{i,t+1}\ \ w.p.1$ 为正。因此，（14.8）和（14.9）是等式且 $Z_{it}=1$。

$P=PDV$ 的公式将通过递推的方式由（14.8）和(14.9)推出，利用（14.3）和（14.6）得：

$$\pi_{i,t+1}=\overline{D}_{it}+V_{it}\tilde{\delta}_t \tag{14.10}$$

为了简化记号，对所有 t，记 $u'(c_{t+1})=u'_{t+1}$。由（14.8）和（14.10），我们有：

$$P_{it}u'(c_t)=\beta E_t u'_{t+1}\overline{D}_{it}+\beta E_t(u'_{t+1}\tilde{\delta}_t)V_{it}+\beta E_t[u'_{t+1}P_{i,t+1}] \tag{14.11}$$

注意，至少在理论上 $\mu'_{it},\sigma'_{it},\overline{D}_{it},V_{it}$ 均为可观察的。因而，如果我们通过在（14.8）式中用 $t+1$ 代替 t 向前递推，并将结果代入（14.11），那么我们能够利用（14.9）根据 μ'_{it}， σ'_{it} 求解出

$$\begin{aligned} &E_t m_t \equiv \frac{\beta E_t u'_{t+1}}{u'_t}; E_t n_t \equiv \frac{\beta E_t(u'_{t+1}\tilde{\delta}_t)}{u'_t} \\ &m_t \equiv \frac{\beta u'_{t+1}}{u'_t}; n_t \equiv \frac{\beta u'_{t+1}\tilde{\delta}_t}{u'_t} \end{aligned} \tag{14.12}$$

和建立 P_{it} 的 $P=PDV$ 公式。由（14.11）我们递推下去可得：

$$
\begin{aligned}
P_{it} &= E_t m_t \overline{D}_{it} + E_t n_t V_{it} + \beta E_t [u'_{t+1} P_{i,t+1}] / u'_t \\
&= E_t m_t \overline{D}_{it} + E_t n_t V_{it} + E_t \{ m_t [E_{t+1} m_{t+1} \overline{D}_{i,t+1} + E_{t+1} n_{t+1} V_{i,t+1} \\
&\quad + \beta E_{t+1} (u'_{t+2} P_{i,t+2}) / u'_{t+1}] \} \\
&= E_t m_t \overline{D}_{it} + E_t n_t V_{it} + E_t [m_t E_{t+1} m_{t+1} \overline{D}_{i,t+1} + m_t E_{t+1} n_{t+1} V_{i,t+1}] + \ldots \\
&\quad + E_t [m_t E_{t+1} m_{t+1} \cdots E_{t+T} (m_{t+T} \overline{D}_{i,t+T})] \\
&\quad + E_t [m_t E_{t+1} m_{t+1} \cdots E_{t+T-1} m_{t+T-1} E_{t+T} n_{t+T} V_{i,t+T}] \\
&\quad + E_t [m_t E_{t+1} m_{t+1} \cdots E_{t+T} (m_{t+T} P_{i,t+T+1})]
\end{aligned} \qquad (14.13)
$$

假设 4. 效用函数$u(\cdot)$满足对所有$\{P_{it}, \pi_{it}, R_{it}\}_{t=1}^{\infty}, i = 1,2,\ldots, N$，$TVC_{\infty}$对消费者的最大化是必要的。此处$TVC_{\infty}$意味着：

$$E_t [m_t E_{t+1} m_{t+1} \cdots E_{t+T} (m_{t+T} P_{i,t+T+1})] \to 0 \qquad (T \to \infty) \qquad (14.14)$$

由（14.9），对每一个t，我们得到：

$$1 = E_t m_t \mu'_{it} + E_t n_t \sigma'_{it} \qquad (14.15)$$

由此，若$\sigma'_{Nt} \equiv 0$，那么（14.15）蕴含着

$$E_t m_t = 1/\mu'_{Nt};\ E_t n_t = [(\mu'_{Nt} - \mu'_{it})/\sigma'_{it}](1/\mu'_{Nt}) \equiv -\Delta t/\mu'_{Nt} \qquad (14.16)$$

注意，这里的Δt为投资组合理论中收益的经典风险调整率。同时，μ'_{Nt}为本金加上在过程N中使用一个边际单位所得利息。重要的是Δt与i无关。进一步，Ross 风险价格λ_t由$\lambda_t = \beta \Delta t$确定。这可根据（11.16）和(14.16)得到。现在来讨论K个因子的情况。

在K个因子情况下，令：

$$f_i(x_{it}, r_t) \equiv \bar{f}_i(x_{it}) (\sum_{k=0}^{K} A_i^k \tilde{\delta}_{t+1}^k), \tilde{\delta}_{t+1}^0 \equiv 0, A_i^0 > 0 \qquad (14.17)$$

数据上的假设完全相同于第 13 节。然后，如（14.4）、(14.5)和（14.6）一样，我们可以记：

$$f_i(x_{it}, r_t) = \mu_{it} + \sum_{k=1}^{K} \sigma_{it}^k \tilde{\delta}_{t+1}^k \qquad (14.18)$$

$$f'_i(x_{it}, r_t) = \mu'_{it} + \sum_{k=1}^{K} \sigma_{it}^k \tilde{\delta}_{t+1}^k \qquad (14.19)$$

$$\pi_i(x_{it}, r_t) = \overline{D}_{it} + \sum_{k=1}^{K} V_{it}^k \tilde{\delta}_{t+1}^k \equiv \pi_{i,t+1} \qquad (14.20)$$

其中（14.18）—（14.20）中的量由（14.7）定义。保留上述相同的假设。则（14.8）和（14.9）变为：

$$P_{it}u_t' = \beta E_t[u_{t+1}'(\overline{D}_{it} + \sum_{k=1}^{K} V_{it}^k \tilde{\delta}_{t+1}^k) + u_{t+1}' P_{i,t+1}] \qquad (14.21)$$

$$u_t' = \beta E_t[u_{t+1}'(\mu_{it}' + \sum_{k=1}^{K} V_{it}^k \tilde{\delta}_{t+1}^k)] \qquad (14.22)$$

定义：

$$m_t \equiv (\beta u_{t+1}')/u_t',\ n_t^k \equiv (\beta u_{t+1}' \tilde{\delta}_{t+1}^k)/u_t' \qquad (14.23)$$

然后，令 N 为无风险过程，即 $\sigma_{Nt}^k \equiv 0$ 对所有 k 和 t 成立，我们有：

$$E_t m_t = 1/\mu_{Nt}' \qquad (14.24)$$

且对任一 i：

$$1 = (E_t m_t)\mu_{it}' + \sum_{k=1}^{K} \sigma_{it}'^k (E_t n_t^k) = \mu_{it}'/\mu_{Nt}' + \sum_{k=1}^{K} \sigma_{it}'^k (E_t n_t^k) \qquad (14.25)$$

因此，从（14.25）可知：

$$(\mu_{Nt}' - \mu_{it}')/\mu_{Nt}' = \sum_{k=1}^{K} \sigma_{it}'^k (E_t n_t^k),\ i = 1,2,\ldots,N \qquad (14.26)$$

这里假定（14.26）的唯一解 $E_t n_t^k$ 存在且可定义为：

$$E_t n_t^k \equiv -\Delta t/\mu_{Nt}' \qquad (14.27)$$

还要注意系统风险 k 的 Ross 价格 λ_{kt} 也满足 $\lambda_{kt} = \beta\Delta_t^k$，这可从（11.16）和（14.27）得出。

设：

$$\xi_{it} \equiv \overline{D}_{it} - V_{it}\Delta_t$$

则（14.8）变为：

$$\begin{aligned} P_{it} &= \frac{\xi_{it}}{\mu_{Nt}'} + E_t\{[\frac{\beta u_{t+1}'}{u_t'}\mu_{Nt}'](P_{i,t+1})\}/\mu_{Nt}' \\ &\equiv \{\xi_{it} + E_t\hat{P}_{i,t+1}\}/\mu_{Nt}' \end{aligned}$$

因此：

$$E_t\hat{P}_{i,t+1} + \xi_{it} = \mu_{Nt}' P_{it} \qquad (14.28)$$

方程（14.28）表明，把 P_{it} 投入股票市场得到的期望收益在支付承担风险的报酬后与把它投资于无风险过程得到的期望收益是一样的。这说明如果考虑资金的机会成本和承担风险的成本，股票市场是一个公平博奕，很显然，$\xi_{it} = 0$ 和 $\mu_{Nt}' = 1$ 是鞅的必要条件。特别要注意

的是方程（14.28）的可检验性，它的不成立标志着在我们的模型在现实市场的无效性。

值得在此指出的是若随机变量

$$(\beta u'_{t+1}/u'_t)\mu'_{Nt} \equiv I_t \tag{14.29}$$

在 t 期独立于的 $P_{i,t+1}$，则（14.16）蕴含着（14.28）因此可以将其改写为：

$$E_t P_{i,t+1} + \xi_{it} = \mu'_{Nt} P_{it} \tag{14.30}$$

方程（14.30）是可直接检验的，因为与（14.28）不同，它不含主观因素。导出像（14.30）那样不包含主观因素从而可以直接检验的方程的问题尚未解决。独立性假设是一种太强的方式。也许较弱的假设存在，它会导致一个类似于（14.30）的公式，至少在逼近的意义下是成立的。

15. 可检验公式

在资产定价函数 $P_i(y)$ 线性的假设下产生的公式是可直接检验的。下一节将给出一个例子，在那里， $P_i(y)$ 是线性的。

定理 15.1 假设第 14 节中的假设 1—4 成立。进一步，假设存在常数 K_i 和 L_i 使得：

$$P_i(y) = K_i y + L_i \quad , \qquad i = 1,2,\ldots,N \tag{15.1}$$

则对每一个 t 和 i：

$$\mu'_{Nt} P_{it} = E_t P_{i,t+1} - \sum_{k=1}^{K} \Delta_t^k S_{it}^k + E_t \pi_{i,t+1} - \sum_{k=1}^{K} \Delta_t^k V_{it}^k \tag{15.2}$$

一定成立。

证明：这里，由（15.1）和（14.20），我们可以记：

$$\begin{aligned} P_{i,t+1} &\equiv P_i(y_{t+1}) \equiv \overline{P}_{it} + \sum_{k=1}^{K} S_{it}^k \tilde{\delta}_{t+1}^k \\ \overline{P}_{it} &\equiv E_t P_{i,t+1} \end{aligned} \tag{15.3}$$

$$\pi_{i,t+1} \equiv \overline{D}_{it} + \sum_{k=1}^{K} V_{it}^k \tilde{\delta}_{t+1}^k ; \ \overline{D}_{it} \equiv E_t \pi_{i,t+1} \tag{15.4}$$

其中 $E_t P_{i,t+1}, E_t \pi_{i,t+1}, S_{it}^k$ 和 V_{it}^k 不依赖于 y_{t+1} 而仅依赖于 $(x_{it},\ldots,x_{Nt})$ 。

为了证明（15.2），必需证明（15.3）和（15.4）成立。由（14.17）和 y_{t+1} 的定义，我们有：

$$y_{t+1} \equiv \sum_{j=1}^{N} f_j(x_{j+1}, r_t) = \sum_{j=1}^{N} \bar{f}_j(x_{jt})(\sum_{k=0}^{K} A_j^k \tilde{\delta}_{t+1}^k) \qquad (15.5)$$

因此，y_{t+1}为股票$\tilde{\delta}_{t+1}^k$的线性组合，且其权重仅依赖于$(x_{it},...,x_{Nt})$。$P_{i,t+1}$也完全一样。这样，对适当的S_{it}^k，（15.3）式成立，因为$P_{i,t+1}$关于y_{t+1}为线性。方程（14.20）与（15.4）相同。

（14.21）式两边同除以u_t'，得：

$$P_{it} = E_t[m_t(\overline{D}_{it} + \sum_{k=1}^{K} V_{it}^k \delta_{t+1}^k)] + E_t[m_t P_{i,t+1}] \qquad (15.6)$$

利用（14.23），令：

$$\overline{m}_t \equiv E_t m_t, \overline{n}_t^k \equiv E_t n_t^k \qquad (15.7)$$

由（156）和（15.7），我们有：

$$\begin{aligned} P_{it} &= \overline{m}_t \overline{D}_{it} + \sum_{k=1}^{K} V_{it}^k \overline{n}_t^k + E_t[m_t(\overline{P}_{it} + \sum_{k=1}^{K} S_{it}^k \tilde{\delta}_{t+1}^k)] \\ &= \overline{m}_t \overline{D}_{it} + \sum_{k=1}^{K} V_{it}^k \overline{n}_t^k + \overline{m}_t \overline{P}_{it} + \sum_{k=1}^{K} S_{it}^k \overline{n}_t^k \end{aligned}$$

但（14.24）和（14.27）蕴含：

$$\mu_{Nt}' P_{it} = \overline{D}_{it} + \overline{P}_{it} - \sum_{k=1}^{K} \Delta_t^k (V_{it}^k + S_{it}^k)$$

定理得证。

值得指出的是，尽管（15.2）不包含主观因素因而可以直接检验，但这是在资产定价函数$P_i(y_{t+1})$为线性的强假设下得出的。为了能把持有资产i的单期收益Z_{it}写成 Ross 的线性形式（11.2），线性假设是必须的。从而可利用Z_{it}的线性形式推出（15.2）。我们推断，为了能以（11.2）的形式写出均衡资产收益，在效用函数和技术上需要更强的条件。因此（15.2）不是普遍成立的，它仅在线性逼近下成立。

（15.2）的经济内容是很有说服力的，它就是标准的无套利条件。在时间段$[t,t+1]$上承担k类单位风险的价格为Δ_t^k。t期风险来自两个方面：$\pi_{i,t+1}$和$P_{i,t+1}$。利润包含V_{it}^k单位的k类风险。股票i在$t+1$期的价格包含S_{it}^k单位的k类风险。因此，承担各种类型和各种来源所带来的风险的总成本为：

$$\sum_{k=1}^{K} \Delta_t^k (V_{it}^k + S_{it}^k)$$

这样，（15.2）刚好说明投资 P_{it} 的无风险所得一定等于 $t+1$ 期股票 i 的经风险调整的售出价与经风险调整的利润之和。

16. 一个例题

在本节中，我们将给出一个例子来说明在 11—15 节中所阐述的思想，具体数据如下：

$$u(c)=\log c \tag{16.1}$$

$$f_i(x_i,r)=A_i(r)x_i^{\alpha} \quad (i=1,2,...,N;0<\alpha<1) \tag{16.2}$$

我们假定对所有的 i，有：

$$A_i(r)>0 \quad (\forall r\in R)$$

且 $A_i(r)$ 关于 r 连续。由 R 的紧性可知，每个 $A_i(r)$ 均有正的下界 $\underline{A}_i>0$。

对所有的 t，一阶必要条件变为

$$\frac{1}{c_t}\geq\beta\alpha E_t[\frac{1}{c_{t+1}}A_i(r_t)x_{it}^{\alpha-1}] \tag{16.3}$$

$$\frac{1}{c_t}x_{it}=\beta\alpha E_t[\frac{1}{c_{t+1}}A_i(r_t)x_{it}^{\alpha-1}]x_{it}\ ,\ i=1,2,...,N \tag{16.4}$$

$$\lim_{t\to\infty}E_t[\frac{\beta^{t-1}}{c_t}x_t]=0 \tag{16.5}$$

猜测一个形如

$$c_t=(1-\lambda)y_t;x_t=\lambda y_t;x_{it}=\eta_i x_t;\sum_{i=1}^{n}\eta_i=1 \tag{16.6}$$

的最优解，其中：

$$\lambda>0;\eta_i\geq 0,\ i=1,2,...,N \tag{16.7}$$

将（16.6）代入（16.3）和（16.4），解出 λ 、$\{\eta_i\}_{i=1}^N$，并验证（16.5）是否成立。这样我们得：

$$\frac{1}{(1-\lambda)y_t}\geq\beta\alpha E_t\left\{\frac{1}{(1-\lambda)y_{t+1}}A_i(r_t)x_{it}^{\alpha-1}\right\} \tag{16.8}$$

当且仅当：

$$\frac{1}{y_t} \ge \beta\alpha E_t\left\{\frac{A_i(r_t)}{\sum_{j=1}^{N} A_j(r_t)x_{jt}^{\alpha-1}} x_{it}^{\alpha-1}\right\},$$

当且仅当：

$$\frac{1}{y_t} \ge \beta\alpha E_t\left\{\frac{\eta_i^{\alpha-1}x_t^{\alpha-1}A_i(r_t)}{\sum_{j=1}^{N} A_j(r_t)\eta_j^{\alpha}x_t^{\alpha}}\right\}$$

当且仅当：

$$\frac{1}{y_t} \ge \beta\alpha E_t\left\{\frac{A_i(r_t)}{\sum_{j=1}^{N} A_j(r_t)\eta_j^{\alpha}}\right\}\frac{\eta_i^{\alpha-1}}{x_t} \equiv \frac{\beta\alpha\eta_i^{\alpha-1}\Gamma_i}{x_t}$$

当且仅当：

$$x_t \ge \beta\alpha\eta_i^{\alpha-1}\Gamma_i y_t \qquad (16.9)$$

从（16.4），按得出（16.9）的同样的步骤，我们得：

$$\frac{x_{it}}{y_t} = \beta\alpha\eta_i^{\alpha}\Gamma_i \qquad (16.10)$$

当且仅当：

$$x_{it} = \beta\alpha\eta_i^{\alpha}\Gamma_i y_t = \eta_i x_t \qquad (16.11)$$

因此（16.9）对所有t和i等式成立。且在$N=1$时容易看出：

$$\lambda = \beta\alpha,$$

于是对$N \ge 1$推测有：

$$\lambda = \beta\alpha;\ \eta_i^{\alpha-1}\Gamma_i = 1 \ \ (i=1,2,\ldots,N) \qquad (16.12)$$

和检验（16.5）式是自然的。若（16.12）满足（16.5），则我们找到一个最优解，因而其为唯一的最优解。

这样，我们有：

$$\Gamma_i \equiv E\left\{\frac{A_i(r)}{\sum_{j=1}^{N} A_j(r)\eta_j^{\alpha}}\right\} = \eta_i^{1-\alpha};\ \sum_{j=1}^{N}\eta_j = 1 \qquad (16.13)$$

可以证明，（16.13）有唯一解$\{\overline{\eta}_i\}_{i=1}^{N}$。

易证在（16.6）中令 $\overline{\lambda}\equiv\alpha\beta,\eta_i\equiv\overline{\eta}_i, i=1,2,...,N$，则产生的解不仅在结构上满足（16.3）和（16.4）也同时满足（16.5）。我们将此留给读者。

让我们利用这个解来计算第 12 节讨论的均衡资产定价函数的例子。由(12.35)和(12.32)，我们有：

$$\begin{aligned}E_t[u'(c_{t+1})(P_{i,t+1}+\overline{\pi}_{i,t+1})\overline{P}_{it}] &= E_t[\alpha A_i(r_t)\overline{x}_{it}^{\alpha-1}u'(c_{t+1})] \\ &= E_t[\alpha A_i(r_t)\overline{\eta}_i^{\alpha-1}u'(c_{t+1})]\end{aligned} \tag{16.14}$$

$$\begin{aligned}\overline{\pi}_{i,t+1} &= A_i(r_t)\overline{x}_{it}^{\alpha}-\alpha A_i(r_t)\overline{x}_{it}^{\alpha-1}\overline{x}_{it} \\ &= (1-\alpha)A_i(r_t)\overline{x}_{it}^{\alpha}=(1-\alpha)A_i(r_t)\overline{\eta}_i^{\alpha}x_t^{\alpha}\end{aligned} \tag{16.15}$$

因此，对于 $u(c)=\log c$，利用 $c_t=(1-\overline{\lambda})y_t$，形如 $P_{it}=P_i(y_t)$ 的资产定价函数的一阶必要条件变为：

$$P_i(y_t)/y_t=\beta E_t[(P_i(y_{t+1})+\pi_{i,t+1})/y_{t+1}] \tag{16.16}$$

方程（16.15）和（16.16）两等式告诉我们：

$$\begin{aligned}P_i(y_t)/y_t &= \beta E_t\{(1-\alpha)A_i(r_t)\overline{\eta}_i^{\alpha}\overline{x}_t^{\alpha}/[\sum_{j=1}^{N}A_i(r_t)\overline{\eta}_j^{\alpha}\overline{x}_t^{\alpha}] \\ &\quad +P_i(y_{t+1})/y_{t+1}\} \\ &\equiv \beta(1-\alpha)\overline{\eta}_i+\beta E_t[P_i(y_{t+1})/y_{t+1}]\ \ i=1,2,...,N\end{aligned} \tag{16.17}$$

其中利用（16.13）可知：

$$\overline{\eta}_i=E_t[A_i(r_t)\overline{\eta}_i^{\alpha}/(\sum_{j=1}^{N}A_j(r_t)\overline{\eta}_j^{\alpha})] \tag{16.18}$$

方程组（16.17）特别适合应用压缩映射定理来产生满足（16.17）的唯一的不动点 $\overline{P}(y)\equiv(\overline{P}_1(y),...,\overline{P}_N(y))$，而我们推测此解形式为：

$$\overline{P}_i(y)=\overline{K}_i y\ \ ,i=1,2,...,N \tag{16.19}$$

通过对比系数可从（16.19）中找出 $\overline{K}_i$。显然由（16.19）可知，$\overline{K}_i$ 满足：

$$\overline{K}_i=\beta(1-\alpha)\overline{\eta}_i+\beta\overline{K}_i\ ,i=1,2,...,N \tag{16.20}$$

于是：

$$\overline{K}_i=(1-\beta)^{-1}\beta(1-\alpha)\overline{\eta}_i\ ,i=1,2,...,N \tag{16.21}$$

因为（16.19）的右边为定义在 $[0,\infty)$ 上有界连续函数空间上且取值在 R^N 中的模为 β 的压缩映射，所以（16.19）的解为满足 $P_i(y)/y$ 在 $[0,\infty)$ 上有界且连续的唯一解。

我们现在给出一个已解的例题。检验$P_i(y)$对来自问题（16.19）和（16.21）的数据的依赖性是有趣的。

首先，在单一资产情况下，我们由（16.18）可知$\eta_N=1$，于是：

$$P(y)=\frac{\beta}{1-\beta}(1-\alpha)y \tag{16.22}$$

因此，（i）资产价格随产出对资本投入弹性的增加而减少；（ii）产出的变化不影响股票价格；（iii）资产价格随β增加而增加。

结果（i）的原因是因为国民产出收益部分与α反向变化。由对数效用函数可以推出（ii）。（iii）是因为随着β的增加，将来相对于现在更重要，因此储蓄应该增加，这样就促成资产价格上升。

进一步，（16.22）还告诉我们资产价格随当前可支配收入y的增加而增加。

其次，在多资产情况下，我们有：

$$P_i(y)=\frac{\beta}{1-\beta}(1-\alpha)\overline{\eta}_i y \quad, \quad i=1,2,\ldots,N \tag{16.23}$$

我们可以看出，如果以系数A_i度量厂商i利用公共技术x^α的生产率，使得i的产出为$A_i x^\alpha$，则相对生产能力较高的厂商的股票的相对价格也高。绝对生产率不影响相对价格，这是因为$\overline{\eta}_i$关于$(A_1,\ldots,A_N)$是零次齐次的。

这又是一个直观上看起来非常清晰而后得以应用的结果。在这种经济活动中，消费者没有其它选择而只能投资于N个厂商的股票中。因此，若他们的生产率全部减半，尽管产出将降低，资产价格有关整体将没有变化。这类结果是对于对数效用和 Cobb-Douglas 生产技术情形所特有的。

17. 各种应用和习题

（1）在第 3 节的 Black-Scholes 应用中，假设作为期权标的物的股票价格S如下给出：

$$\frac{dS}{S}=\alpha dt+\sigma_1 dz_1+\sigma_2 dz_2 \tag{17.1}$$

替代方程（3.7）。注意在（17.1）中我们有两个相关的噪声，且：

$$E_t dz_1^2=dt,\ E_t dz_1 dz_2=\rho dt,\ E_t dz_2^2=dt$$

推出此种情况下的 Black-Scholes 方程并推测当$\rho\to 1$或$\rho\to -1$时期权的变化。

（2）更多的关于 Black-Schloes 的问题：第 3 节中的 Black-Scholes 期权定价模型揭示出期权

F 的价格为股票价格 S，执行价格 E，期权的执行时间 τ，无风险利率 r 和股票价格的瞬时波动率 σ^2 的函数。直观地我们有：

（a）$\partial F/\partial S > 0$，即，随股票价格上升期权价格亦上升。
（b）$\partial F/\partial E < 0$，即，随执行价格上升期权价格亦下降。
（c）$\partial F/\partial \tau > 0$，即，随执行日的延长期权价格亦上升。
（d）$\partial F/\partial r > 0$，即，随无风险利率的上升期权价格亦上升。
（e）$\partial F/\partial \sigma^2 > 0$，即，随波动率的上升期权价格亦上升。

验证（a）—（e）的真实性。可参见 Merton（1973a）和 Smith（1976）。

（3）Merton 的协态方程：考虑第 4 节中的只有一个风险资产和一个无风险资产的特殊情况 Merton 模型：

$$\max E_0\left\{\int_0^T u(C,t)dt + B(W(T))\right\}$$

$$dW = \omega_1(\alpha_1 - r)Wdt + (rW - C)dt + \omega_1 W\sigma_1 dz_1$$

$$dP_1/P_1 = \alpha_1 dt + \sigma_1 dz_1, W_0, P_1(0) \text{ 给定}$$

这里 α_1 和 σ_1 独立于 P_1 和 t，ω_1 表示 W 在风险资产中的百分比，无风险资产所获利率为 r。令 $P(t)$ 表示状态 $W(t)$ 的协态的现值。利用第三章的 Hamiltonian 和协态方程加上控制 C 及 ω_1 必需满足的必要条件，写出协态的形式方程：

$$dP = \mu_P(P,t)dt + \sigma_P(P,t)dz_1 \tag{17.2}$$

找出函数 μ_P 和 σ_P。若 α_1 和 σ_1 独立于时间，你会得出什么结果？对随机积分（17.2），你能根据 P_0 找出 $P(t)$ 的解吗？

$P(T)$ 的值如何确定？$P(t)$ 在给定 P_0 的条件下依赖于 $U(C,t), W_0, T$ 和 $B(W(T))$ 吗？不管投资者的爱好、年龄和初始财富如何，α_1, r 和 σ_1 的齐次性是否蕴含投资者行为的齐次性？你如何描述这个陈述？

（4）把由 Vasicek（1977）引进的一种特殊情况考虑成第 8 节所提的一般模型的一个实例。假定风险的市场价格 $q(r,t)$ 为常数且独立于时间和即期利率水平，我们记 $q(r,t) \equiv q$。接下来假定即期利率 $r(t)$ 服从过程：

$$dr = \alpha(\gamma - r)dt + \rho dz \text{ ， } \alpha > 0 \tag{17.3}$$

如（8.4）的一种特殊情况。方程（17.3）称为 Ornstein-Uhlenbeck 过程，且当$\alpha > 0$时它又在金融文献中叫做弹性随机游动。这一过程最大的优点是具有平稳分布。在以上特定假设下找出期限结构方程（8.10）的解，并解释其经济意义。参见 Vasicek（1977）。

（5）第 9 节所提 Constantinides 模型的一个简单生成法如下：假设项目在时间段$(t, t+dt)$所生成的现金流为随机的，表示为$cdt + sdz_2$，这里$c = c(x,t), s = s(x,t)$且z_2为维纳过程。改写（9.1）为$dx = \mu dt + \sigma dz_1$。假设$z_1$和$z_2$相关，在这些假设下找出代替（9.3）和（9.8）的新方程并解释随之而来的结果。

（6）考虑资产收益遵循如下过程：

$$dx_i / x_i = \alpha_i dt + \sigma_i dz \quad, \ i = 1,2,\ldots,N \tag{17.4}$$

这里dx_i / x_i为股票i的瞬时收益。注意扰动dz对所有股票都相同。利用dz和无风险的投资组合获得无风险收益率r的假设，证明：

$$(\alpha_i - r)/\sigma_i = (\alpha_j - r)/\sigma_j \tag{17.5}$$

对所有的i, j成立，假设$\sigma_N \equiv 0$且$\alpha_N \equiv r$。

现在介绍通胀。设价格水平P服从：

$$dP/P = \pi dt + \sigma dw \tag{17.6}$$

称上面（17.4）中的收益为名义的。假定$E_t dwdz = \rho dt$。利用随机积分求出真实收益：

$$\begin{aligned} \frac{d(x_i/P)}{x_i/P} &= (\ )dt + (\ )dz + (\ )dw \\ &\equiv A_i dt + B_i dt + C_i dt \end{aligned} \tag{17.7}$$

其次，利用类似于 Black-Scholes 方法的套期保值和均衡论点推出系数A_i, B_i, C_i的关系，它们一定在均衡中成立。感觉上假定dz和dw无风险资产的存在是多余的。通常假定股票收益与预期通胀负相关。你能在A_i, B_i, C_i的均衡关系中找出与这个假设相一致的一组$\{\alpha_i, \sigma_i\}_{i=1}^N, \pi, \sigma, \rho$结构吗？

（7）考虑第三章第 15 节和本章第 11—16 节所提到的模型类似的连续时间模型。

代表性消费者求解问题：

$$\max E_0\int_0^{\infty} c^{-\beta t}u(c(t))dt$$
$$\sum_1^N x_t(t)=x(t) \tag{17.8}$$

满足：

$$c(t)dt+dx+\sum_1^N P_i dE_i=\sum_1^N d\pi_i dE_i+\sum_1^N dR_i x_i$$
$$x(0)=x_0\text{给定，}\ E_i(0)=1, i=1,2,...,N$$

其中：

$$dR_i=A_i dt+B_i dz \tag{17.9}$$

$$d\pi_i=a_i dt+b_i dz\quad (i=1,2,...,N) \tag{17.10}$$

厂商的问题如下：

$$\max d\pi_i=\max[f_i(x_i)-x_i A_i]dt+[\sigma_i(x_i)-x_i B_i]dz \tag{17.11}$$

可得：

$$f_i'(x_i)=A_i;\sigma_i'(x_i)=B_i \tag{17.12}$$

$$a_i=f_i(x_i)-x_i f_i'(x_i);b_i=\sigma_i(x_i)-x_i\sigma_i'(x_i) \tag{17.13}$$

这里 $E_i(t)$ 表示厂商 i 在时刻 t 拥有的股份数，$x(t)$ 为时刻 t 的真实产出，$c(t)dt$ 为在 $(t,t+dt)$ 内的消费总量。时刻 t 的 $E_i(t)$ 股份的所有权在时刻 $t+dt$ 可得 $d\pi_i$ 单位的产出。时刻 t 在过程 i 中的投资 $x_i(t)$ 在时刻 $t+dt$ 可得新产出 dR_i 以及原始的 $x_i(t)$。在每一时刻 t，产量 $x(t)$ 被分配到 $i=1,2,...,N$ 个厂商，其租金收入 dR_i 将依赖于时刻 $t+dt$ 所发生的情况而定，且在时刻 $t+dt$ 获得。均衡如本章第 12 节所定义，重新回忆在均衡中代表性消费者对 $c,x,\{x_i\}_{i=1}^N$ 和 $\{E_i\}_{i=1}^N$ 将面对 $d\pi_i$，dR_i 和 P_i 等参数和解（17.8）。

用离散时间的类似问题逼近（17.8），取极限且消去高阶项得到下述最优条件：

$$\beta-E_t(\frac{du'}{u'dt})=E_t(\frac{dR_i}{dt})+E_t(\frac{du'dR_i}{u'dt}) \tag{17.14}$$

$$-E_t(\frac{du'}{u'dt})=E_t(\frac{Z_i}{dt})+E_t(\frac{du'Z_i}{u'dt}) \tag{17.15}$$

$$Z_i\equiv(d\pi_i+dp_i)/P$$

在均衡中，$d\pi_i$，dR_i 的瞬时期望值和标准差在每一时刻 t 可以写成 $x(t)$ 的函数而与时间无关，解释为什么可以这样做？同样解释为什么 $P_i(t)$ 可以写作 $P_i(x(t))$。接下来假设第 N 个过程是无风险的，即 $\sigma_N(x_N)=0$。在均衡中记 $r(x)\equiv f_N'(x_N)$。对 $P_i(x)$ 利用 $It\hat{o}$ 引理推导 Lintner-Sharpe 确定性等价公式：

$$
\begin{aligned}
r(t)P_i(x) &= P_{ix}(x)\mu(x)+\frac{1}{2}P_{ixx}(x)\sigma^2(x)+a_i(x) \\
&\quad +[P_{ix}(x)\sigma(x)+b_i(x)]E_t(\frac{du'dz}{u'dt})
\end{aligned}
\tag{17.16}
$$

这里 $dx\equiv\mu(x)dt+\sigma(x)dz$。解释（17.16）的经济意义。

18. 进一步的注释和参考

在本章里，我们给出了大量的应用来说明各种随机方法。关于金融领域利用这些随机方法的研究文章，数量在近二十年有显著的增长，最近有几本收集了如 Szegö 和 Shell（1972）、Ziemba 和 Vickson（1975）、Levy 和 Sarnat（1977）、Bicksler（1979）及其他人的主要贡献的书籍。这些书中的文章可以用来作为本章应用的补充。

Black-Scholes 的期权定价理论及随后的数位作者对于这一理论的改进对这一领域内文献的迅速增长起了很大的作用。要浏览期权定价的主要结果，我们建议看 Smith（1976，1979）的综述文章。

Black-Scholes（1973）原文中给出了如下的几个假设：（1）没有卖空障碍；（2）没有税收及交易费用；（3）市场活动连续且股票价格服从 $It\hat{o}$ 过程；（4）股票无红利支付，期权仅能在合约到期日执行；（5）无风险利率已知且为常数。在这些假设下，Black 和 Scholes 认为无风险套期保值策略可由看涨期权和标的股票的适当比例构建出。这样的一个瞬时无风险套期保值策略获得等于已知为常数的无风险利率的收益率。从 1973 年开始，数位作者修改了这些假定，更重要的是，Black-Scholes 期权定价理论在金融的各个领域得到大量的应用。

原始假定的几种修正概括如下：Merton（1973a）分析了带有随机利率的期权模型。Ingersoll（1976）关注了一种不同税制的问题。Cox 和 Ross（1976）用不同的随机过程完成了期权定价。Merton（1976）研究了不连续收益结构的问题。Smith（1976）讨论了一些另外的修正。

为了举例说明，我们遵循 Smith（1979）的方法来阐述 Black-Scholes 期权定价理论的一些应用，在这里首先被考虑的为欧式看涨期权。回忆欧式看涨期权的意义，它可在合约到期日以标明的执行价格买进一股股票。本章第 3 节和练习（2）证明看涨期权的价格可以表示为 $F(X,\tau,E,r,\sigma^2)$。Merton（1973a）研究了欧式看跌期权，即在合约到期日可以确定价格卖出一股股票。他发现当借贷利率持平时，欧式看跌期权的价格等于由一份具有相同期限的欧式看涨期权、一张面值等于期权执行价格的无风险债券和一股卖空的股票所构成的投资组合

的价格。

Black-Scholes 看涨定价模型也可用来定价厂商的债务和股票。假定为：（1）厂商发行的贴现债券直到债券到期日持有者方可收到红利（当然如果有的话），且如果仍有剩余，则付给股票持有者。（2）厂商总资产不受资本结构的影响，即 Modigliani-Miller（1958）的应用情形。（3）对具有对数正态分布和常数收益率的厂商资产价值的动态行为有齐次期望。在这些假设和给定常数无风险利率情况下，Black-Scholes 理论提供了厂商证券的正确估价。在这种情况下，发行债券相当于股票持有者卖给债券持有者厂商资产加上一个债券面值为执行价格的看涨期权。这样，厂商的股票像一个看涨期权。

下面，代替只在到期日付一次本金和利息的债券，我们来考虑可转换债券。可转换债券向债券持有者在到期日提供一种选择：或者收到债券的面值，或者拥有厂商资产价值相应比例的新股。应用 Black-Scholes 理论已证，可转换债券相当于不可转换债券加上一个看涨期权。参见 Ingersoll（1977）和他的参考书籍。

Black-Scholes 理论也可用来给其他几种不同的未定权益定价，如有保险合约的定价，有担保贷款定价，出租定价和保险定价等。Smith（1979）综述类似定价的各种结果并提供了适当的参考书目。

期权定价的一个简单方法最近由 Cox 和 Ross（1979）提出。他们给出了一个简单的离散时间期权定价公式，在那里由套利方法得出的期权估价的基本经济原理既清晰又直观。进一步，他们的方法仅要求初等数学，但作为特殊极限，它包含了 Black-Scholes 模型。尤其是，Cox 和 Ross（1979）提出当股票价格的变动为离散的二叉树过程或这样一个过程的极限形式相一致时，期权可以只基于套利方法来定价。利用套利方法定价期权一定要存在一个其他资产的组合，这些资产在任一状态下都可以精确复制出由最优执行期权所得的收益。

Cox 和 Ross 的基本结果可表达如下：假定市场是完全的，利率改变不是随机的，但股票价格的改变总是随机的。在离散时间模型中，按照只利用股票和债券构造投资组合的套利方法，给所有到期日和执行价格的期权定价的充分必要条件是在每一期中：（1）股票价格从期初值到期末的变化仅为除息值。（2）红利和两种可能变化中的每一个的大小目前为已知函数，它至多依赖于（i）当前及过去股票价格，（ii）当前及过去随机变量的值，此随机变量每一期的变化完全相关于股票价格的变化，（iii）公历时间。这一结果的证明参见 Cox 和 Ross（1979）。

简单说明 Black-Scholes 理论的一些修正及应用后，我们向读者推荐另外两篇讨论与期权定价理论相联系的一些基本问题的文章，它们的作者是 Harrison 和 Kreps（1979）及 Kreps（1980）。考虑的重点是：交易证券的能力经常使一些多期证券跨越许多状态成为可能。在 Black-Scholes 理论中有两个证券及不可数个的状态，但由于有无穷多的交易机会和不确定性被很好地解决，所以市场实际上是完全的。这样，尽管从相对状态来讲证券相当少，然而市场是完备的，风险被有效分派。确定能使市场完全的证券数目和评估 Black-Scholes 理论的稳健性的重要条件是什么？这一问题呈现在 Kreps（1980）中。

在第 4 节中简单讨论过的 Merton（1971）的连续模型提出了一个在不确定情况下分析消费和投资的一般均衡框架。研究离散时间下相同问题的两篇早期文章是 Fama（1970a）和 Hakansson（1970）。另外一些重要文章有 Sharpe（1964）、Lintner（1965a,1965b）和 Mossin

（1966）。使用连续分析的优势在 Merton（1975b）中被讨论，他宣称，当交易时间段充分小时，连续时间解与离散时间解是一致的，且所需假设按照它们实际活动的资本市场来描述。进一步，连续时间分析具有经典均值—方差模型的所有简单性和经验的易处理性的优点，但没有多余的假设。

Merton（1973b）用类似于 Merton（1971）的方法发展了瞬时资本资产定价模型。资本市场模型由任一数量的、使一生消费效用最大化的和进行连续时间交易的投资者们的投资组合选择行为所导出。资产的显式需求函数被求得，且表明当前的需求受未来投资机会的不确定改变的可能性所影响。期望收益间的均衡关系由总需求和市场出清的要求得出。与标准的 $CAPM$ 相反，风险资产的期望收益率可以不同于无风险利率，甚至当没有系统或市场风险时也如此。Merton（1973b）的理论被 Breeden（1979）加以推广。这一推广是利用与 Merton（1973b）相同的连续时间结构完成的。然而，Breeden（1979）证明 Merton 的多维 β 系数定价方程可以退化成单一的 β 方程，其中任一证券的瞬时超额期望收益与它的 β 系数，或者说与它同积累消费的协方差成比例。Breeden 指出这一结果可推广到资产 β 系数是相对于积累真实消费而度量的多商品世界。

Merton（1971,1973b）的其他推广，刚才提及了一些，不包含 Magill 和 Constantinides（1976）。他在投资组合选择问题中引进了交易成本，Constantinides（1980）在消费投资问题中引进了个人税，Litzenberger 和 Ramaswamy（1979）在个人税外还包含了红利。

Merton（1981）是一篇介绍消费、投资和投资组合选择的一般均衡分析方法的有用的综述文章。在这篇文章中 Merton 给出一个在不确定条件下的消费储蓄选择和投资组合选择的全面统一的评述。这两种选择是不确定条件下投资的微观经济理论的组成部分。这一综述丰富了本章第 4 节我们的简要的讨论。注意由 Black-Scholes 期权理论给出的证券定价与连续时间资本定价模型的一致性的讨论见 Smith（1979，pp.89-90）。

在第 7 节，我们仿照 Fischer（1975）阐述随机积分方法在指数债券问题方面的应用。进一步的、最近的参考文献有 Liviatan 和 Levhari（1977）。指数化概念的简要历史可见于 Humphrey（1974）。

利率的期限结构理论被关注已有较长的时间，一般性地浏览会发现 Meiselman（1962）、Malkiel（1966）、Nelson（1972）、Michaelsen（1973）等书籍是很有用的。Vasicek（1977）的文章被用在第 8 节中以说明随机微积分方法的广泛性。随机微积分也被 Cox,Ingersoll 和 Ross（1978）用来发展利率期限结构的一般理论。Cox, Ingersoll 和 Ross 利用 Merton（1973b）的连续时间 $CAPM$ 结构和 Lucas（1978）的理性预期均衡模型发展了一个完全瞬时资产定价模型。该模型易处理，且当均衡随时间运动时，也不会与个人期望矛盾。由这种模型，Cox, Ingersoll 和 Ross 发展了一种利率期限结构理论并给出这种期限结构的闭形式解，也给出具有潜在可检验债券的价格。详见 Cox, Ingersoll 和 Ross（1978）的文章。另外一些相关文章有 Richard（1978）、Dothan（1978）及 Brennan 和 Schwartz（1977）。

随机微积分方法在期货定价中也找到它的应用之地。在第一章第 6 节我们简要介绍了期

货定价的概念。有兴趣研究期货定价的读者可以参考 Black（1976）、Cox，Ingersoll 和 Ross（1980）以及这些文章中所引用的参考文献。期货市场和远期市场在专业文献中曾被作为相同问题对待，Cox, Ingersoll 和 Ross（1980）解释了它们本质上的不同，并清晰地给出这两个市场的适当关系。

货币均衡需求及其在货币管理上的相关问题是好的研究领域。在应用 10 中多次被引用的一些文献有 Eppen 和 Fama（1968,1969）、Neave（1970）、Vail（1972）、Constantinides（1976）及 Constantinides 和 Richard（1978）等。对可能引起某些读者兴趣的相关问题的讨论见于 Daellenbach 和 Archer（1969）及 Crane（1971）。

在第 11—18 节，我们仿照 Brock（1978）发展了由 Merton 首创的资本资产定价的瞬时一般均衡理论。然而，我们注意到 Merton 的瞬时资本资产定价模型并不是 Arrow-Debreu 意义下的一般均衡理论，因为不确定性的技术来源与风险资产的均衡价格不相关。在这些节中这样处理的原因是现代金融和随机增长模型的一体化思想。基本上，我们所做的是修正 Brock 和 Mirman（1972）的随机增长模型，以便将重要的投资决策问题合并到 Lucas（1978）的资产定价模型中。这样做的目的是保留 Merton 框架的经验易处理性，同时决定由 Ross（1976）资本资产定价套利理论导出的风险价格。系统风险 k 在 t 期的 Ross 价格，用 λ_{kt} 表示，它是由系统风险源 $\tilde{\delta}_{kt}$ 所导致的。λ_{kt} 由消费边际效用与 δ_{kt}^{N} 的协方差确定。这样，Ross 的 λ_{kt} 被生产不确定性源和风险资产的需求的相互作用而确定。进一步，该模型给出一个前后关系，其中均衡收益是经济中不确定性的线性函数的结论成立的充分条件，在体验和技术上可以找到。收益的线性是 Ross 理论中所必需的。

引进不完全信息，并探索厂商应遵循什么规则才能在某些或有市场短少时使代表性消费者可最大化均衡福利，沿着这样的一条思路，我们的研究应该得到更多的进展。最后，更困难也许更有趣的问题是引入不均匀的消费者，使得我们可以考虑借用未来收入和研究这样做对风险价格的影响。